

Der Gupta-Bleuler-Raum
des Photonenfeldes
bei vorgegebener Viererstromdichte

Walter Geßner

1975

Der Gupta - Bleuler - Raum
des Photonenfeldes bei vor-
gegebener Viererstromdichte

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Physik
der Ludwig - Maximilians - Universität
München

vorgelegt von
Walter G e B n e r
München, Oktober 1974



Erstreferent: Univ.- Doz. Dr. V. Ernst
Korreferent : Professor Dr. H. P. Dürr
Vorsitzender: Professor Dr. F. Bopp

Promotionskolloquium: 28. 4. 1975



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551911_0040

0.1: Inhaltsverzeichnis.

Einleitung	5
§ 1) Der Gupta - Bleuler - Raum	
1.1: Der universale Fockraum F .	8
1.2: Der Gupta - Bleuler - Raum.	11
1.3: Abbildungen in $(F, \langle \rangle)$.	12
1.4: Faserung von $(F', \langle \rangle)$.	19
§ 2) Unterräume mit Lorentzbedingung.	
2.1: Die Lorentzbedingung.	25
2.2: Restklassenbildung in den Lorentzräumen.	32
2.3: Restklassenrepräsentanz durch transver-	
sale Vektoren.	43
2.4: Schrödingerkurven.	51
§ 3) Der wechselwirkungsfreie Fall.	
3.1: Die Schrödingerkurven.	53
3.2: Verschwindende elektromagnetische	
Feldstärken.	55
3.3: Die Eichgruppe $\mathcal{E}(t)$.	58
3.4: Bemerkungen zur Lorentzäquivalenz.	61
§ 4) Die j_μ - Wechselwirkung.	
4.1: Der Hamiltonoperator.	63
4.2: Die Schrödingerkurven.	64
4.3: Zur Quadratintegrierbarkeit der g_μ .	71
4.4: Der Zeitentwicklungsoperator.	75
4.5: Die Lorentzbedingung.	77
4.6: g_μ und die Erwartungswerte für Feld-	
stärken und Potentiale.	81
4.7: g_μ und die Photonendichte.	86

Anhang

A.1: Photonendichte zu stationären Ladungsverteilungen	93
A.2: Interferenzen im Strahlungsfeld zweier Punktstrahler.	97
B : Topologische Bemerkungen zu den Lorentzräumen.	99
Literaturverzeichnis	101
Zusammenfassung	103

0.2: Notation, mathematische Vorbemerkungen.

a) Minkowski - Metrik.

Als metrischer Tensor wird durchweg $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ verwendet. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes vermerkt ist, gilt Summationskonvention. Dabei sollen griechische Indices stets von 0 bis 3 laufen, lateinische von 1 bis 3. Für die Zeitvariable setzen wir $t = x_0$, so daß $\dot{x}^0 = -t$. Bezüglich der Zeitableitung ist deshalb zu beachten:

$$\dot{} = \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_0} = \partial^0 = -\partial_0 = -\frac{\partial}{\partial x^0}.$$

b) Zahlkörper.

$\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ sind die Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen, $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$ die entsprechenden Produkträume. Zu $c \in \mathbb{C}$ ist c^* das Konjugiert - Komplexe. Ein $\mathbb{R}$ - Vektorraum bzw. $\mathbb{C}$ - Vektorraum ist ein Vektorraum über dem Koeffizientenkörper $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

$\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen.

c) Fourier - Transformation, δ - Distribution.

Seien $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. Für die Fourierkomponenten $f(p_1, \dots, p_n)$ zur Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ verwenden wir folgende Beziehungen:

$$f(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int dx_1 \dots dx_n f(x_1, \dots, x_n) e^{-i(x_1 p_1 + \dots + x_n p_n)}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int dp_1 \dots dp_n f(p_1, \dots, p_n) e^{+i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)}$$

$$\delta(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^{-n} \int dx_1 \dots dx_n e^{+i(x_1 p_1 + \dots + x_n p_n)}$$

Im folgenden wird fast ausschließlich im Schrödingerbild gearbeitet, so daß Raum- und Zeitvariable formal sehr unterschiedlich behandelt werden. Aus diesem Grund führen wir die Fouriertransformation einer Funktion $f(x_0, \dots, x_3)$ stets nur bezüglich des räumlichen Vektors $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$

durch. Die Zeitabhängigkeit der Funktion $f(x) = f(x_0, \underline{x})$ geht somit auf die Fourierkomponenten $f(x_0, \underline{k})$ über.

d) Rechenregeln für Operatoren.

Für das Rechnen mit Operatoren A, B , für die $[A, B] \in \mathbb{C}$ ist, benützen wir häufig die bekannten Regeln:

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B]; \quad e^{A+B} = e^{-\frac{1}{2}[A, B]} e^A e^B.$$

e) Hilbertraum.

Wir gebrauchen den Begriff des Hilbertraumes entsprechend der ursprünglichen Axiomatisierung durch J. v. Neumann [1], indem wir Vollständigkeit des Raumes und Separabilität verlangen. In der neueren Literatur wird Separabilität meist nicht gefordert.

f) Der Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen.

In der Regel werden die im folgenden auftretenden Funktionen $f(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n): \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{C}$ als quadratintegrierbar vorausgesetzt. Die Menge dieser quadratintegrierbaren Funktionen stellt einen $\mathbb{C}$ -Vektorraum dar, der mit $L^2(\mathbb{R}^{3n})$ bezeichnet wird. In [1] ist gezeigt, daß $L^2(\mathbb{R}^m)$, $m \in \mathbb{N}$, Hilbertraum im Sinne von e) ist. Die in [1] bewiesene Separabilität garantiert, daß $L^2(\mathbb{R}^m)$ eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt. Diese Tatsache spielt im folgenden (z. B. in 2.3) eine entscheidende Rolle.

g) Wahl der Einheiten.

Wir verwenden natürliche Einheiten $\hbar = 1 = c$.

0.3: Einleitung.

Die Quantenelektrodynamik wird häufig auf Probleme angewandt, bei denen neben quantisierten Feldern unquantisierte elektromagnetische Felder über klassische Stromdichten $j_\mu(x)$ vorgegeben sind. Untersucht wird beispielsweise die Wechselwirkung zwischen einem quantisierten Diracfeld und der aus j_μ und der Diracstromdichte resultierenden Viererstromdichte. Bei der näherungsweisen Lösung des zugehörigen Gleichungssystems vernachlässigt man gewöhnlich das quantisierte Strahlungsfeld zu Gunsten des äußeren, nicht quantisierten Feldes. Ein solches Vorgehen scheint umso eher berechtigt, je größer die Zahl der Elementarladungen (etwa in einem schweren Atomkern) ist, die das äußere Feld erzeugen; denn desto genauer kann es im Prinzip mit einer Probeladung ausgemessen werden, deren Rückwirkung auf das Feld vernachlässigbar wird.

Trotz ihrer rechnerischen Brauchbarkeit ist die Behandlung des äußeren Feldes als c - Zahl - Feld unbefriedigend. Daher wurden schon frühzeitig Versuche unternommen, die Wechselwirkung zwischen quantisiertem Strahlungsfeld und klassischer Viererstromdichte zu beschreiben. Die Entwicklungsstufen dieses eingeschränkten Problems lassen sich etwa wie folgt skizzieren:

- Friedrichs [6] hat unter Zugrundelegung eines Hilbert-raumes wichtige Spezialfälle des Problems diskutiert und zur mathematischen Behandlung seiner "modified vacuum states" gewisse Exponentialoperatoren verwendet. Unabhängig davon hat Glauber [10], [11] im Zusammenhang mit seiner Klärung des optischen Kohärenzbegriffes analoge Operatoren ausgiebig benutzt. Zuvor [5] hatte er das Problem der Wechselwirkung von klassischer Stromdichte und quantisiertem Strahlungsfeld bei anderer Zielsetzung behandelt. Jedenfalls war durch [5], [6], [11] erwiesen, daß die mit den modified vacuum states bzw. mit den kohärenten Zuständen verbundenen Exponential-

operatoren entscheidende Bedeutung für die Lösung des Problems haben.

- Gupta und Bleuler [2], [3], [4] hatten andererseits gezeigt, daß der Zustandsraum des Photonenfeldes im allgemeinen kein (positiv - definites) Skalarprodukt zuläßt, wenn man von dieser Lorentzinvarianz voraussetzt. Erst mit Hilfe einer für den wechselwirkungsfreien Fall aufgestellten "Lorentzbedingung" konnten sie einen Unterraum des Zustandsraumes angeben, in dem ihre Bilinearform wenigstens positiv - semidefinit war. Die Untersuchungen von Friedrichs und Glauber, die einen Raum positiv - definiten Metrik voraussetzen, können daher nicht ohne weiteres auf einen "Gupta - Bleuler - Raum" ausgedehnt werden.
- Gomata [14] zeigte jedoch, daß es unter gewissen Voraussetzungen auch im "Gupta - Bleuler - Raum" kohärente Zustände gibt, die sich überdies durch positive Norm auszeichnen. Er behandelte jedoch ausschließlich den wechselwirkungsfreien Fall $j_\mu(x) \equiv 0$.

Mit der vorliegenden Arbeit soll die beschriebene Entwicklung in Richtung auf eine möglichst vollständige Theorie der Wechselwirkung zwischen quantisiertem Strahlungsfeld und klassischer Viererstromdichte im Gupta - Bleuler - Raum fortgesetzt werden. Wir treffen nur eine Einschränkung: die in den erwähnten Exponentialoperatoren auftretenden Vierervektorfunktionen sollen quadratintegrierbar sein. Damit ist insbesondere die "Infrarotkatastrophe" ausgeschlossen, die nach einer grundsätzlichen Klärung durch Bloch und Nordsieck neuerdings von Kibble [13] und Reents [16], allerdings nicht im Gupta - Bleuler - Raum, von ihrem mathematischen Hintergrund her diskutiert wurde.

Zur Durchführung des angedeuteten Programms konstruieren wir zunächst einen so umfassenden "Gupta - Bleuler - Raum", daß ihm, wie sich späterhin zeigt, alle Zustände der be-

trachteten Wechselwirkung angehören. Mit Hilfe von Operatoren, wie sie zum Aufbau kohärenter Zustände aus dem Vakuum dienen, wird eine doppelte Faserung im Gupta - Bleuler - Raum eingeführt, die eine sehr durchsichtige Beschreibung der physikalischen und mathematischen Eigenschaften des Raumes ermöglicht. Ein weiterer Hauptschritt besteht in der Verallgemeinerung der von Gupta und Bleuler für den freien Fall eingeführten Lorentzbedingung. Zusammen mit der Einführung einer "Lorentzäquivalenzrelation", welche die Strahläquivalenz im Hilbertraum verallgemeinert, wird es dadurch möglich, eine unendliche Schar von "Lorentzräumen" innerhalb des Gupta - Bleuler - Raumes zu konstruieren, die alle Prä - Hilberträume sind und weitere physikalisch kennzeichnende Eigenschaften besitzen: Einer von ihnen wird gerade durch die transversalen Photonenzustände aufgespannt.

Nach diesen allgemeineren Untersuchungen werden die Lösungen der Schrödingergleichung des Grundproblems explizit bestimmt. Dabei zeigt sich, daß die so erhaltenen "Schrödingerkurven" einen Lorentzraum, in dem sie gestartet sind, im wesentlichen nur unter der Voraussetzung nicht wieder verlassen, daß die vorgegebene Ladungsdichte zeitlich konstant ist und daß der "Anfangsvektor" der Kurve im "richtigen" Lorentzraum gewählt wurde. Es besteht in dieser Hinsicht eine eindeutige Zuordnung zwischen den Lorentzräumen und den zeitkonstanten Ladungsdichten.

Daß überhaupt die Art der Zeitabhängigkeit der Ladungsdichte für eine sinnvolle Quantentheorie im Gupta - Bleuler - Raum entscheidend ist, zeigt sich noch an anderen Stellen: Nur bei zeitkonstanter Ladungsdichte ist der Hamiltonoperator des Grundproblems "Lorentzobservable" und für nichtnegativen Erwartungswert der Photonendichte ist es hinreichend, daß die Zeitabhängigkeit der Ladungsdichte einem gewissen "Rahmengesetz" folgt.

§ 1) Der Gupta - Bleuler - Raum.

1.1: Der universale Fockraum $\mathcal{F}$.

Wir ziehen im folgenden die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes, also Photonen in Betracht. Demgemäß haben wir es mit der Menge aller Viererimpulse (k_μ) zu tun, wobei $\underline{k} \in \mathbb{R}^3$ und $k_0 = |\underline{k}|$ ist. Jeder solche Viererimpuls ist also eindeutig durch seinen Raumanteil $\underline{k}$ gegeben.

Sei nun in $\mathbb{R}^3$ eine Folge $\underline{k}_1, \underline{k}_2, \dots$ beliebig ausgewählt. Jedem $\underline{k}_i$ werde ein Minkowski - Index $\mu_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ zugeordnet. Für alle $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Tensorfunktionen

$$\phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{C}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- i) $\phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n)$ ist invariant gegenüber simultanen Permutationen $(\underline{k}_\sigma \leftrightarrow \underline{k}_\tau; \mu_\sigma \leftrightarrow \mu_\tau)$.
- ii) Für jede Indexfolge $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ ist $\phi_{\mu_1, \dots, \mu_n} \in L^2(\mathbb{R}^{3n})$, d. h. quadratintegrierbar.
- iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} \int d\underline{k}_1 \dots d\underline{k}_n \phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}^*(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n)$ existiert.

Zu festem $n \in \mathbb{N}$ bildet die Menge aller $\phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}$ mit den Eigenschaften i) - iii) einen $\mathbb{C}$ - Vektorraum. Dies folgt mit der Cauchy - Schwarz'schen Ungleichung (im folgenden auch kurz CS - Ungleichung genannt), nach der eine Linearkombination solcher $\phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}$ ebenfalls ii) und iii) befriedigt.

Wählen wir eine Konstante $\phi \in \mathbb{C}$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eindeutig einen Tensor $\phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n)$ mit den Eigenschaften i) bis iii), so ist die formale Spaltenfolge

$$|\phi\rangle =: \begin{pmatrix} \phi \\ \phi_{\mu_1}(k_1) \\ \vdots \\ \phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(k_1, \dots, k_n) \end{pmatrix} \quad (1.1/1)$$

definiert. Die $\mathbb{C}$ - Vektorraumeigenschaft der oben eingeführten n - stufigen Tensoren überträgt sich auch auf die Menge aller $|\phi\rangle$, wenn Addition $|\phi\rangle + |\psi\rangle$ und Multiplikation $c|\phi\rangle$, $c \in \mathbb{C}$, komponentenweise erklärt werden.

Den $\mathbb{C}$ - Vektorraum aller $|\phi\rangle$ nennen wir universalen Fockraum F .

Das Beiwort "universal" soll andeuten, daß F einen formalen Oberraum für die im folgenden eine Rolle spielenden Vektoren Mengen darstellt. Wegen der Bezeichnung von F als Fockraum vgl. Bem. zu (1.3/9).

Die Tensoren $\phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(k_1, \dots, k_n)$ bezeichnen wir als Fockraumkomponenten von $|\phi\rangle$. Mit Hilfe des metrischen Tensors $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ erklärt man den zugehörigen kontravarianten Tensor:

$$\phi^{\mu_1, \dots, \mu_n}(k_1, \dots, k_n) =: g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_n \nu_n} \phi_{\nu_1, \dots, \nu_n}(k_1, \dots, k_n).$$

In Verallgemeinerung der Summe von iii) kann in F eine Bilinearform $\ll | \gg : F \times F \rightarrow \mathbb{C}$ durch folgende Vorschrift eingeführt werden: Zu $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in F$ sei

$$\ll \phi | \psi \gg =: \phi^* \psi + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n=0}^3 \int d^3 k_1 \dots d^3 k_n \phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}^*(k_1, \dots, k_n) \psi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(k_1, \dots, k_n) \quad (1.1/2)$$

Die Form $\ll | \gg$ existiert wegen iii) und der CS - Ungleichung auf ganz F und ist positiv - definit. Das Paar $(F, \ll | \gg)$ stellt sogar einen Hilbertraum dar: Vollständigkeit und Separabilität folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von $L^2(\mathbb{R}^{3n})$, die in [1], teilweise auch in [16] gezeigt sind. Bei allen diesen mathematisch angenehmen Eigenschaften hat aber der Raum

($F, \langle | \rangle$) den entscheidenden Nachteil, eine nicht kovariante Bilinearform zu besitzen. Gupta und Bleuler ([2] - [4]) haben daher eine kovariante Bilinearform auf F eingeführt, die wir für die weitere Untersuchung dem Raum F aufprägen.

1.2: Der Gupta - Bleuler - Raum.

Als Gupta - Bleuler - Form auf F führen wir eine Bilinearform $\langle | \rangle : F \times F \rightarrow \mathbb{C}$ folgendermaßen ein:

Zu $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in F$ sei

$$\langle \phi | \psi \rangle = \phi^* \psi + \sum_{n=1}^{\infty} \int d^3x_1 \dots d^3x_n \phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}^* (k_{11}, \dots, k_{1n}) \psi_{\mu_1, \dots, \mu_n} (k_{11}, \dots, k_{1n}) \quad (1.2/1)$$

Wegen der Bedingung iii) von 1.1 existiert $\langle \phi | \psi \rangle$ auf ganz $F \times F$, denn es besteht die Majorante

$$|\langle \phi | \psi \rangle|^2 \leq \langle \phi | \phi \rangle \cdot \langle \psi | \psi \rangle.$$

Aus (1.2/1) folgt sofort

$$i) |\psi\rangle = |\phi\rangle + |\chi\rangle \longrightarrow \langle \phi | \psi \rangle = \langle \phi | \phi \rangle + \langle \phi | \chi \rangle$$

$$ii) |\psi\rangle = c|\phi\rangle, c \in \mathbb{C} \longrightarrow \langle \phi | \psi \rangle = c \langle \phi | \phi \rangle$$

$$iii) \langle \phi | \psi \rangle^* = \langle \psi | \phi \rangle.$$

Wegen iii) ist $\langle \phi | \phi \rangle$ stets reell. Nach (1.2/1) kann $\langle \phi | \phi \rangle$ aber verschwinden, ohne daß $|\phi\rangle = 0$ ist, oder negativ sein. Die Gupta - Bleuler - Form ist daher nicht imstande, F zu normieren; insbesondere wird F durch sie kein Banachraum.

Als Gupta - Bleuler - Raum bezeichnen wir das Paar $(F, \langle | \rangle)$, bestehend aus universalem Fockraum F und Gupta - Bleuler - Form $\langle | \rangle$.

Offensichtlich enthält $(F, \langle | \rangle)$ sehr viele physikalisch bedeutungslose Vektoren; denn schon um für den Ausdruck $|\langle \phi | \psi \rangle|^2$ eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation zu ermöglichen, wird man die Gültigkeit der CS - Ungleichung fordern müssen. Deren Bestehen ist aber nur in Räumen mit positiv - semidefiniter Metrik sichergestellt ([15], S. 84). Es ist daher wichtig, Unterräume von $(F, \langle | \rangle)$ zu finden, für deren Vektoren $|\phi\rangle$ stets $\langle \phi | \phi \rangle \geq 0$ gilt. Wir greifen dieses Problem in § 2 auf.

1.3: Abbildungen in $(F, \langle | \rangle)$.

A) Allgemeine Begriffe.

Wir betrachten weiterhin ausschließlich lineare Abbildungen (Operatoren) $\omega : F \supseteq \mathcal{D}_\omega \longrightarrow \mathcal{W}_\omega \subseteq F$, die auf $\mathcal{D}_\omega$, ihrem Definitionsbereich, erklärt sind und deren Bildmenge (Wertevorrat) $\mathcal{W}_\omega =: \omega \mathcal{D}_\omega$ Teilmenge von F ist. Gilt $|\varphi\rangle \in F$ und $|\chi\rangle \in \mathcal{D}_\omega$, $|\psi\rangle = \omega|\chi\rangle$, so schreiben wir, wie üblich, auch $\langle \varphi | \omega | \chi \rangle$ statt $\langle \varphi | \psi \rangle$.

Die abbildungstheoretischen Grundbegriffe "adjungiert", "selbstadjungiert", "symmetrisch", "unitär" können auf $(F, \langle | \rangle)$ nicht ohne weiteres angewandt werden, weil sie sich definitionsgemäß auf Räume mit positiv - definiter Bilinearform ("Skalarprodukt") beziehen. In teilweiser Anlehnung an [9] benutzen wir folgende Sprechweise:

Zu $\omega : \mathcal{D}_\omega \longrightarrow \mathcal{W}_\omega$ heißt die Abbildung ω^* pseudoadjungiert, wenn $\mathcal{D}_{\omega^*} \supseteq \mathcal{D}_\omega$ ist und für $|\phi\rangle \in \mathcal{D}_{\omega^*}$, $|\psi\rangle \in \mathcal{D}_\omega$ stets gilt: $\langle \phi | \omega | \psi \rangle^* = \langle \psi | \omega^* | \phi \rangle$.

ω heißt pseudosymmetrisch, wenn bei Beschränkung auf $\mathcal{D}_\omega$ die Abbildungen ω und ω^* übereinstimmen.

Pseudosymmetrische Abbildungen haben reelle Erwartungswerte.

ω heißt schließlich pseudounitär, wenn $\mathcal{D}_\omega = \mathcal{D}_{\omega^*} = \mathcal{W}_\omega = \mathcal{W}_{\omega^*} = F$ und $\omega\omega^* = 1 = \omega^*\omega$ gilt.

Wenn es einen Unterraum $H \subset F$ gibt, so daß die Gupta - Bleuler - Form auf H positiv - definit wird (die Existenz solcher Räume wird in § 2 gezeigt), so gehen bezüglich $(H, \langle | \rangle)$ die eingeführten Abbildungsbezeichnungen in der Regel in die entsprechenden (üblichen) Bezeichnungen ohne "pseudo" über.

B) Erzeuger- und Vernichterooperatoren.

Alle Abbildungen $\omega : F \supseteq \mathcal{D}_\omega \longrightarrow \mathcal{W}_\omega \subseteq F$, die im folgenden

eine Rolle spielen werden, sind im Prinzip definiert, wenn zwei Mengen "symbolischer" Operatoren, die Erzeuger- und Vernichtoperatoren für Photonen, eingeführt sind. Diese stellen im allgemeinen keine Abbildungen im Sinne von 1.3.A dar, wie aus ihrer expliziten Konstruktion, die [6] bzw. [12] folgt, zu sehen sein wird.

Ein Vierervektor $a_\mu(\underline{k})$ linearer Abbildungen werde formal folgendermaßen definiert:

$$a_\mu(\underline{k}) \begin{pmatrix} \phi \\ \phi_{\mu_1}(\underline{k}_1) \\ \vdots \\ \phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1} \phi_\mu(\underline{k}) \\ \sqrt{2} \phi_{\mu\mu_1}(\underline{k}, \underline{k}_1) \\ \vdots \\ \sqrt{n+1} \phi_{\mu\mu_1 \dots \mu_n}(\underline{k}, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.3/1)$$

Wegen der Bedingung 1.1.iii gehört der Bildvektor $a_\mu(\underline{k})|\phi\rangle$ dem Raum F genau dann an, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n=0}^3 (n+1) \int d^3k_1 \dots d^3k_n \phi_{\mu\mu_1 \dots \mu_n}^*(\underline{k}, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \phi_{\mu\mu_1 \dots \mu_n}(\underline{k}, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) < \infty$$

Diese Forderung liefert den Definitionsbereich von $a_\mu(\underline{k})$. Wir stellen sie für alle μ und $\underline{k}$. Die Vektoren $|\phi\rangle \in F$, die der Forderung für alle μ und $\underline{k}$ entsprechen, bilden, wie man der CS - Ungleichung entnimmt, einen Unterraum F' von F . Wegen der großen Bedeutung von $a_\mu(\underline{k})$ wollen wir weiterhin nur noch den Unterraum $(F', \langle \cdot | \cdot \rangle)$ des gesamten Gupta - Bleuler - Raumes betrachten. Wir sind dann sicher, daß Operatoren wie $L(\underline{k}) =: k^\nu a_\nu(\underline{k})$, die eine wichtige Rolle spielen werden, auf dem betrachteten Raum im Sinne von 1.3.A definiert sind. Der zu $a_\mu(\underline{k})$ pseudoadjungierte symbolische Operator $a_\mu^*(\underline{k})$ ist weiterhin formal gegeben durch

$$a_\mu^*(\underline{k}) \begin{pmatrix} \phi \\ \phi_{\mu_1}(\underline{k}_1) \\ \vdots \\ \phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1}} g_{\mu\mu_1} \delta(\underline{k} - \underline{k}_1) \phi \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=1}^n g_{\mu\mu_s} \delta(\underline{k} - \underline{k}_s) \phi_{\mu_1 \dots \mu_{s-1} \mu_{s+1} \dots \mu_n}(\underline{k}_1 \dots \underline{k}_{s-1} \dots \underline{k}_n) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.3/2)$$

wobei mit $\hat{}$ gekennzeichnete Größen zu streichen sind.
Der (formale) Beweis zu (1.3/2) ist:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | a_{\mu}^*(\underline{k}) | \Phi \rangle &= \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=1}^n g_{\mu\mu_s} \int d^3k_1 \dots d^3k_n \delta(\underline{k} - \underline{k}_s) \psi_{\mu_1 \dots \mu_n}^*(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \phi_{\mu_1 \dots \mu_s \dots \mu_n}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) = \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=1}^n \int d^3k_1 \dots d^3k_n \psi_{\mu_1 \dots \mu_s \dots \mu_n}^*(\underline{k}_1, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_s, \dots, \underline{k}_n) \phi_{\mu_1 \dots \mu_s \dots \mu_n}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_s, \dots, \underline{k}_n) = \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int d^3k_1 \dots d^3k_{n-1} \psi_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}^*(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_{n-1}) \phi_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_{n-1}) = \langle \Phi | a_{\mu}(\underline{k}) | \Psi \rangle^* \end{aligned}$$

$a_{\mu}^*(\underline{k})$ kann zu $a_{\mu}(\underline{k})$ nur als formal - pseudoadjungiert (und nicht als pseudoadjungiert) bezeichnet werden, weil für die letztgenannte Eigenschaft nach 1.3.A noch $\mathbb{D}a_{\mu}^*(\underline{k}) \supseteq \mathbb{D}a_{\mu}(\underline{k})$ gelten muß. Dies trifft jedoch nicht zu: die rechte Seite von (1.3/2) stellt im allgemeinen keinen Vektor von F dar, denn (1.1/1) divergiert i.a. wegen auftretender δ^2 - Ausdrücke. Gleichwohl sieht man $a_{\mu}^*(\underline{k})$ als (formalen) Operator über ganz F' an.

So weit ab von dem durch 1.1 abgesteckten mathematischen Rahmen die Erzeuger und Vernichter $a_{\mu}(\underline{k})$, $a_{\mu}^*(\underline{k})$ auch liegen mögen: in 1.3.C werden sie zur Konstruktion der Operatorenalgebra $\bigcap (F')$ benutzt, deren sämtliche Elemente wieder Abbildungen laut 1.3.A sind.

Zuvor ist noch der physikalische Hintergrund für die Definitionen (1.3/1,2) aufzuzeigen:

Zunächst definiert man mit dem metrischen Tensor

$$a^{\mu}(\underline{k}) =: g^{\mu\nu} a_{\nu}(\underline{k}) \text{ und } \hat{a}^{\mu}(\underline{k}) =: g^{\mu\nu} a_{\nu}^*(\underline{k}). \quad (1.3/3)$$

Dadurch werden auch $a^{\mu}(\underline{k})$ und $\hat{a}^{\mu}(\underline{k})$ zu einander formal - pseudoadjungiert.

Die Definitionen (1.3/1-3) enthalten folgende Vertauschungsrelationen zwischen den durch sie eingeführten Operatoren ([12]):

$$\begin{aligned} [a_{\mu}(\underline{k}), a_{\nu}^*(\underline{\ell})] &= g_{\mu\nu} \delta(\underline{k} - \underline{\ell}); \quad [a_{\mu}(\underline{k}), \hat{a}_{\nu}^*(\underline{\ell})] = \delta_{\mu}^{\nu} \delta(\underline{k} - \underline{\ell}); \\ [a_{\mu}(\underline{k}), a_{\nu}(\underline{\ell})] &= 0 = [\hat{a}_{\mu}^*(\underline{k}), \hat{a}_{\nu}^*(\underline{\ell})]. \end{aligned} \quad (1.3/4)$$

Aus (1.3/4) folgen für das Viererpotential (im Schrödingerbild)

$$A_{\mu}(\underline{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|}} [a_{\mu}(k) e^{i k x} + a_{\mu}^*(k) e^{-i k x}] \quad (1.3/5)$$

und seinen konjugierten Impuls

$$\Pi^{\nu}(\underline{x}') = -i(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3\ell \sqrt{\frac{\ell_0}{2}} [\dot{a}^{\nu}(\ell) e^{i \ell x'} - \dot{a}^{\nu}(\ell) e^{-i \ell x'}] \quad (1.3/6)$$

die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[A_{\mu}(\underline{x}), \Pi^{\nu}(\underline{x}')] = -i \delta_{\mu}^{\nu} \delta(\underline{x} - \underline{x}'). \quad (1.3/7)$$

Die Ansätze (1.3/1-3) sind also dadurch als sinnvoll nachgewiesen, daß sie zu den richtigen kanonischen Vertauschungsrelationen führen.

$A_{\mu}(\underline{x})$ und $\Pi^{\nu}(\underline{x}')$ sind formal - pseudosymmetrisch, ihre Erwartungswerte daher reell.

Die Gupta - Bleuler - Form $\langle | \rangle$ erlaubt nunmehr zwei Ergänzungen zu 1.1:

- a) Als Vakuumbzustand $|0\rangle$ führt man einen Vektor ein, für den $a_{\mu}(k) |0\rangle = 0$ gilt. Wegen (1.2/1) und (1.3/1) sichert diese Eigenschaft, daß $\langle 0 | 0 \rangle \geq 0$ gelten muß. Ausschluß der Norm 0, Forderung der Normierung auf 1 und Verzicht auf einen Phasenfaktor führt zu

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.3/8)$$

- b) Auf Grund von (1.3/8) können die Fockraumkomponenten eines Vektors $|\phi\rangle \in F$ auch wie folgt geschrieben werden:

$$\phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | a_{\mu_1}(k_1) \dots a_{\mu_n}(k_n) | \phi \rangle. \quad (1.3/9)$$

(1.3/9) war der heuristische Ausgangspunkt zur Definition der Fockräume. Für die vorliegende Arbeit er-

schien es zweckmäßiger, von einem abstrakt gegebenen Raum F ("Fockraum") auszugehen und auf ihm erst die Operatoren $a_\mu(\underline{k})$, $a_\nu^*(\underline{l})$ zu definieren.

C) Die Algebra $\mathcal{L}(F')$.

Aus den formalen Operatoren $a_\mu(\underline{k})$, $a_\nu^*(\underline{l})$ lassen sich durch "Verschmieren" mit geeigneten "Testfunktionen" Abbildungen im Sinne von 1.3.A gewinnen. Wir verallgemeinern im folgenden entsprechende Bemerkungen bei Friedrichs [6] und Cook [7].

Zu irgendeiner Funktion $f(\underline{k}): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ aus $L^2(\mathbb{R}^3)$ werde definiert: $\omega_\mu =: \int d\underline{k} f(\underline{k}) a_\mu(\underline{k})$ und $\omega_\mu^* =: \int d\underline{l} f^*(\underline{l}) a_\mu^*(\underline{l})$. Dann sind ω_μ und ω_μ^* zu einander pseudoadjungiert im Sinne von 1.3.A. Zum Beweis bestimmen wir nach (1.3/1)

$$\omega_\mu |\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{1} \int d\underline{k} f(\underline{k}) \phi_\mu(\underline{k}) \\ \sqrt{2} \int d\underline{k} f(\underline{k}) \phi_{\mu\mu_1}(\underline{k}, \underline{k}_1) \\ \vdots \\ \sqrt{n+1} \int d\underline{k} f(\underline{k}) \phi_{\mu\mu_1\ldots\mu_n}(\underline{k}, \underline{k}_1, \ldots, \underline{k}_n) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Demnach gilt $|\Phi\rangle \in \mathbb{D}_{\omega_\mu} \subseteq F'$ genau dann, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n=0}^3 \int d\underline{k}_1 \ldots d\underline{k}_n \left[\int d\underline{k} f^*(\underline{k}) \phi_{\mu\mu_1\ldots\mu_n}^*(\underline{k}, \underline{k}_1, \ldots, \underline{k}_n) \right] \left[\int d\underline{l} f(\underline{l}) \phi_{\mu\mu_1\ldots\mu_n}(\underline{l}, \ldots, \underline{k}_n) \right] \quad (1.3/10)$$

existiert. Hiermit ist der Definitionsbereich von ω_μ abgegrenzt. Andererseits gilt nach (1.3/2)

$$\omega_\mu^* |\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{0}{\sqrt{1}} f^*(\underline{k}_1) \phi_{\mu\mu_1} \Phi \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=1}^n f^*(\underline{k}_s) \phi_{\mu\mu_s} \phi_{\mu_1\ldots\hat{\mu}_s\ldots\mu_n}(\underline{k}_1, \ldots, \hat{\underline{k}}_s, \ldots, \underline{k}_n) \end{pmatrix}$$

so daß $|\Phi\rangle \in \mathbb{D}_{\omega_\mu^*} \subseteq F'$ genau dann ist, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n=0}^3 \int d\underline{k}_1 \ldots d\underline{k}_n \left[\sum_{s=1}^n f^*(\underline{k}_s) \phi_{\mu\mu_s} \phi_{\mu_1\ldots\hat{\mu}_s\ldots\mu_n} \right] \left[\sum_{t=1}^n f(\underline{k}_t) \phi_{\mu\mu_t} \phi_{\mu_1\ldots\hat{\mu}_t\ldots\mu_n}^* \right] \quad (1.3/11)$$

existiert. Man sieht, daß (1.3/11) sicher für alle

Vektoren $|\phi\rangle \in F'$ erfüllt ist, für die bereits (1.3/10) gilt. Somit ist $\mathbb{D}_{w_\mu}^* \supseteq \mathbb{D}_{w_\mu}$ und also die Behauptung bewiesen.

Die zu allen Funktionen $f(\underline{k}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ gebildeten Abbildungen $w_\mu, w_\mu^*, \tilde{w} = g_{\mu\nu}^{\nu\mu} w_\mu, \tilde{w}^* = g_{\mu\nu}^{\mu\nu} w_\mu^*$ erzeugen nun eine $\mathbb{C}$ -Algebra, die wir mit $\Omega(F')$ bezeichnen. Die Elemente von $\Omega(F')$ sind sämtlich Abbildungen laut 1.3.A, denn der zu $w \in \Omega(F')$ formal - pseudoadjungierte Operator $w^* \in \Omega(F')$ hat einen Definitionsbereich $F' \supseteq \mathbb{D}_{w^*} \supseteq \mathbb{D}_w$, so daß w und w^* zu einander im strengen Sinn pseudoadjungiert sind.

Beispiele:

Im folgenden besprechen wir knapp einige Operatoren, die weiterhin eine wichtige Rolle spielen werden:

- Der Lorentzoperator $L(\underline{k}) = k^\nu a_\nu(\underline{k})$ gehört nicht zu $\Omega(F')$. Gleichwohl besitzt er sogar Eigenvektoren in F' (z. B. $|\phi\rangle$), worauf in § 2 und § 3 noch einzugehen ist. Wichtig für § 2 ist, daß wegen $k^2 = 0$ die Operatoren $L(\underline{k})$ mit ihren formal - pseudoadjungierten $L^*(\underline{l})$ vertauschen: $[L(\underline{k}), L^*(\underline{l})] = 0$.
- Auch die Photonendichte $n(\underline{k}) =: a_\nu^*(\underline{k}) a^\nu(\underline{k})$ gehört $\Omega(F')$ nicht an. Dennoch besitzt auch $n(\underline{k})$ nichttriviale Eigenvektoren in F' . $n(\underline{k})$ ist pseudosymmetrisch.
- Sei $\delta_\nu(\underline{k}): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ Vierervektor und für jedes $\nu = 0, \dots, 3$ die Funktion $\delta_\nu \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Dann ist der Operator

$$G =: \exp \int d^3k \left[-\delta_\nu^*(\underline{k}) a^\nu(\underline{k}) + \delta_\nu(\underline{k}) a_\nu^*(\underline{k}) \right]$$

auf F' definiert und pseudounitär: Die Eigenschaft $GG^* = 1 = G^*G$

ist nach 0.2.d klar, denn die Exponenten des Produktes dürfen ohne weiteres addiert werden, da der Kommutator der Exponenten verschwindet.

1.4: Faserung von $(F', \langle | \rangle)$.

Sei $\delta_\mu(k) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ Vierervektor und $\delta_\mu \in L^2(\mathbb{R}^3)$ für alle μ . Zu beliebigem $\varphi \in \mathbb{R}$ definieren wir den auf $(F', \langle | \rangle)$ definierten und pseudounitären Operator (vgl. Beispiel c) von 1.3):

$$D = e^{-i\varphi} \exp \int d^3k [-\delta_\mu^*(\underline{k}) a_\mu^{\dagger}(\underline{k}) + \delta_\mu^{\dagger}(\underline{k}) a_\mu^*(\underline{k})] \quad (1.4/1)$$

Die Menge der so konstruierbaren Operatoren sei $\mathcal{J}$. In Bezug auf $(F', \langle | \rangle)$ hat $\mathcal{J}$ die folgenden Eigenschaften:

a) $\mathcal{J}$ ist eine Automorphismengruppe des Raumes F' und Darstellung der additiven Gruppe der Vierervektoren $\delta_\mu(k)$, sofern zwei Operatoren aus $\mathcal{J}$ als gleich angesehen werden, wenn sie sich höchstens im Phasenfaktor unterscheiden.

b) Es gelten die weiterhin häufig benutzten Rechenregeln:

$$\begin{aligned} D^* a_\mu(k) D &= a_\mu(k) + \delta_\mu(k); \quad D a_\mu(k) D^* = a_\mu(k) - \delta_\mu(k); \\ D^* a_\mu^*(k) D &= a_\mu^*(k) + \delta_\mu^*(k); \quad D a_\mu^*(k) D^* = a_\mu^*(k) - \delta_\mu^*(k). \end{aligned} \quad (1.4/2)$$

c) Zu $|\phi\rangle \in F'$ mit $\langle \phi | \phi \rangle \neq 0$ existieren ein bis auf den Phasenfaktor eindeutig bestimmtes $D \in \mathcal{J}$ und ein $|\phi_0\rangle \in F'$ mit den Eigenschaften

$$|\phi\rangle = D |\phi_0\rangle \quad \text{und} \quad (1.4/3)$$

$$\langle \phi_0 | a_\mu(k) | \phi_0 \rangle = 0 \quad \text{für alle } \mu \text{ und } \underline{k}. \quad (1.4/4)$$

Die Menge der Vektoren $|\phi_0\rangle \in F'$ mit $\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle \neq 0$ und der Eigenschaft (1.4/4) bezeichnen wir mit F'^0 . Dann läßt sich der Sachverhalt von (1.4/3) folgendermaßen beschreiben: Jeder Vektor nichtverschwindender Norm aus F' liegt über einem Vektor aus F'^0 . Abgesehen von seinen Vektoren der Norm 0 kann in F' somit eine Faserung eingeführt werden, indem man

$$\{D |\phi_0\rangle \mid D \in \mathcal{J}\} \quad (1.4/5)$$

als Faser über $|\phi_0\rangle \in F'^0$ bezeichnet.

Diese, durch (1.4/5) eingeführten Fasern nennen wir Normfasern, denn wegen der Pseudounitarität von D hat jeder Vektor $D|\phi_0\rangle$ die Norm seines "Grundvektors" $|\phi_0\rangle$, so daß die Norm innerhalb einer bestimmten Normfaser konstant bleibt.

d) Wenn über den beiden Vektoren $|a_0\rangle \in F^{10}$, $|b_0\rangle \in F^{10}$ nichtverschwindender Norm zu gleichem $D \in \mathcal{J}$ die Bildvektoren $|a\rangle = D|a_0\rangle$, $|b\rangle = D|b_0\rangle$ liegen, so gilt:

$$\frac{\langle a|a_\mu(k)|a\rangle}{\langle a|a\rangle} = \delta_\mu(k) = \frac{\langle b|a_\mu(k)|b\rangle}{\langle b|b\rangle}. \quad (1.4/6)$$

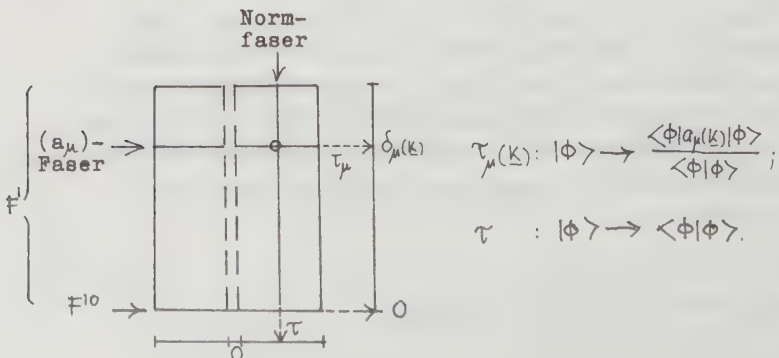
(1.4/6) legt die Einführung einer zweiten Faserung nahe, die gewissermaßen transversal zur Normfaserung verläuft:

Unter einer (a_μ) - Faser im Raum F' verstehen wir die Menge aller Vektoren $|\phi\rangle \in F'$ mit $\langle \phi|\phi\rangle \neq 0$, welchen durch die Abbildung

$$\tau_\mu(k): |\phi\rangle \longrightarrow \frac{\langle \phi|a_\mu(k)|\phi\rangle}{\langle \phi|\phi\rangle} \quad (1.4/7)$$

derselbe Vierervektor δ_μ zugeordnet wird. F'^0 nennen wir dann (a_μ) - Nullfaser.

Auf Grund der Bemerkungen c) und d) kann man sich von den beiden Faserungen von F' das folgende Bild machen:



Das unter F' waagrecht gezeichnete Intervall gibt die Menge der Normen $\langle \phi | \phi \rangle$ an; durch den offenen Mittelstreifen ist angedeutet, daß über die Vektoren verschwindender Norm mit den benutzten Methoden keine Aussage möglich ist. Das rechts von F' senkrecht eingetragene Intervall symbolisiert die Menge der Vierervektoren $\delta_\mu(\underline{k})$.

Um die eingeführte Faserung schon einmal als Beweismittel anzuwenden und um ein Ergebnis aus 4.7 vorzubereiten, untersuchen wir noch die Erwartungswerte der Photonendichte über F':

- e) Die Photonendichte $n(\underline{k}) = a_v^*(\underline{k})a^v(\underline{k})$ und ihre einzelnen Summanden

$$n_{(0)}(\underline{k}) =: a_0^*(\underline{k})a^0(\underline{k}) = -a_0^*(\underline{k})a_0(\underline{k}) \text{ und} \quad (1.4/8)$$

$$n_{(r)}(\underline{k}) =: a_r^*(\underline{k})a_r(\underline{k}), \quad r = 1, 2, 3 \text{ (ohne Summation)}$$

führen, auf $|\phi\rangle =: D|\phi_0\rangle$ angewandt ($|\phi_0\rangle \in F^{10}, D \in \mathcal{V}$), zu folgenden Ergebnissen:

$$\frac{\langle \phi | n(\underline{k}) | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \frac{\langle \phi_0 | n(\underline{k}) | \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle} + \delta_v^*(\underline{k})\delta^v(\underline{k});$$

$$\frac{\langle \phi | n_{(0)}(\underline{k}) | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \frac{\langle \phi_0 | n_{(0)}(\underline{k}) | \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle} - |\delta_0(\underline{k})|^2; \quad (1.4/9)$$

$$\frac{\langle \phi | n_{(r)}(\underline{k}) | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \frac{\langle \phi_0 | n_{(r)}(\underline{k}) | \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle} + |\delta_r(\underline{k})|^2.$$

Unter den Vektoren einer bestimmten Normfaser hat demnach der "Grundvektor" aus der (a_μ) - Nullfaser maximalen Erwartungswert bezüglich $n_{(0)}(\underline{k})$, minimalen bezüglich $n_{(r)}(\underline{k})$. Genauere Aussagen, z. B. über die jeweiligen Vorzeichen dieser Erwartungswerte, sind im allgemeinen Fall nicht möglich. Wie die folgenden Beispiele zeigen, können sogar die Vektoren ein- und derselben Normfaser positive und negative Erwartungswerte sowohl für $n_{(0)}(\underline{k})$ als auch für $n_{(r)}(\underline{k})$ besitzen:

Seien die Fockraumkomponenten von $|\phi_0\rangle$ alle 0 bis auf $\phi_{\mu\lambda}(\underline{k}_\lambda) =: q_{\mu\lambda} \tau(\underline{k}_\lambda)$, wobei für die Skalarfunktion $\tau(\underline{k})$ gelten

soll: $\tau(\underline{k}) \neq 0$ und $\int d^3k \tau^*(\underline{k}) \tau(\underline{k}) < \infty$. Dann ist $|\phi_0\rangle \in F'^0$ nach (1.2/1) und (1.3/1) und

$$\frac{\langle \phi_0 | m_{(0)}(\underline{k}) | \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle} = \frac{\tau^*(\underline{k}) \tau(\underline{k})}{\int d^3\ell \tau^*(\underline{\ell}) \tau(\underline{\ell})} > 0.$$

Nach (1.4/9) ist dann $D \in \mathcal{V}$ so wählbar, daß für $|\phi\rangle =: D|\phi_0\rangle$ gilt:

$$\frac{\langle \phi | m_{(0)}(\underline{k}) | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} < 0.$$

Für ein zweites Beispiel werden die Fockraumkomponenten von $|\phi_0\rangle$ folgendermaßen gewählt: Alle seien 0 bis auf

$\Phi_{\mu_1 \mu_2}(\underline{k}_1, \underline{k}_2) =: \varphi_{\mu_1}(\underline{k}_1) \varphi_{\mu_2}(\underline{k}_2)$, wobei für $\varphi_{\mu}(\underline{k})$ gelten soll: $\varphi_{\mu}^*(\underline{k}) \varphi^{\dagger}(\underline{k}) < 0$ und $\varphi_{\tau}^*(\underline{k}) \varphi^{\tau}(\underline{k}) > 0$ für alle $\underline{k}$ und schließlich $|\int d^3k \varphi_{\mu}^*(\underline{k}) \varphi^{\mu}(\underline{k})| < \infty$.

Dann ist wegen (1.2/1) und (1.3/1)

$$\langle \phi_0 | a_{\mu}(\underline{k}) | \phi_0 \rangle = 0, \text{ also } |\phi_0\rangle \in F'^0, \text{ weiter}$$

$$\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle = [\int d^3k \varphi_{\mu}^*(\underline{k}) \varphi^{\mu}(\underline{k})]^2 > 0 \quad \text{und}$$

$$\langle \phi_0 | a_{\tau}^{\dagger}(\underline{k}) a^{\tau}(\underline{k}) | \phi_0 \rangle = 2 \varphi_{\tau}^*(\underline{k}) \varphi^{\tau}(\underline{k}) \int d^3\ell \varphi_{\mu}^*(\underline{\ell}) \varphi^{\mu}(\underline{\ell}) < 0 \text{ (ohne Summ. über } \mu),$$

so daß

$$\frac{\langle \phi_0 | m_{(r)}(\underline{k}) | \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle} < 0.$$

Nach (1.4/9) kann $D \in \mathcal{V}$ dann so gewählt werden, daß $|\phi\rangle =: D|\phi_0\rangle$ positiven Erwartungswert bezüglich $n_{(r)}(\underline{k})$ hat.

Nach diesen Beispielen ist klar, daß die Operatoren $n_{(0)}(\underline{k})$, $n_{(r)}(\underline{k})$ und $n(\underline{k})$ im vollen Raum $(F', \langle \cdot | \cdot \rangle)$ keine physikalische Bedeutung haben. Erst in den auf Grund der verallgemeinerten Lorentzbedingung konstruierbaren Unterräumen (§ 2) werden sich für sie klarere Verhältnisse ergeben.

In den Aussagen d) und e) konnte $|\phi_0\rangle \in F'^0$ beliebig vorgegeben sein, so lange nur $\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle \neq 0$ gilt. Daher darf für $|\phi_0\rangle$ auch der Vakuumzustand eingesetzt werden. Die dann entstehenden Vektoren $|D\rangle =: D|0\rangle$ zu $D \in \mathcal{V}$ heißen "kohärente Zustände" ([11]) oder Glauberzustände. Sie wurden erstmals von Friedrichs [6] als „modified

vacuum states" im Hilbertraum betrachtet. Glauber [11] hat sie ausgiebig zur Untersuchung von Kohärenzeigenschaften der Strahlung verwendet, nachdem er sie bereits in [5] für die Untersuchung des Problems der Wechselwirkung einer vorgegebenen klassischen Stromdichte mit einem quantisierten Strahlungsfeld herangezogen hatte. Die Glauberzustände besitzen folgende allgemeine Eigenschaften:

$$f) \langle D | D \rangle = 1; \quad (1.4/10)$$

$$a_\mu(\underline{k}) |D\rangle = \delta_\mu(\underline{k}) |D\rangle, \text{ sofern } \delta_\mu(\underline{k}) = \langle D | a_\mu(\underline{k}) | D \rangle; \quad (1.4/11)$$

(1.4/11) hat zur Folge, daß die Fockraumkomponenten eines Glauberzustandes einheitlich faktorisiert werden können, d. h.: Es gibt einen Vierervektor $\phi_\mu(\underline{k})$, so daß stets gilt: $\phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) = \phi_{\mu_1}(\underline{k}_1) \cdots \phi_{\mu_n}(\underline{k}_n)$.

$$\langle D | n(\underline{k}) | D \rangle = \delta_\mu^*(\underline{k}) \delta_\mu(\underline{k}). \quad (1.4/12)$$

$$|D\rangle = e^{-iq} e^{\frac{-1}{2} \int d^3k \delta_\mu^*(\underline{k}) \delta_\mu(\underline{k})} \exp \int d^3k \delta_\nu(\underline{k}) a_\nu^*(\underline{k}) |0\rangle, (q \in \mathbb{R}). \quad (1.4/13)$$

Gerade (1.4/13) zeigt, daß die bisherige Theorie erst einen mathematischen Rahmen liefert, der der Physik noch angepaßt werden muß: Sonst könnte es im Falle $\int d^3k \delta_\nu^*(\underline{k}) \delta_\nu(\underline{k})$ passieren, daß $\langle 0 | D \rangle > 1$ wird und man in Schwierigkeiten mit dem Begriff der Übergangswahrscheinlichkeit kommt. Wir werden genau auf diesen Punkt in 4.7 zurückkommen.

Beweise:

Zu a): Jedes $D \in \mathcal{D}$ ist auf ganz F' definiert. Wegen der Umkehrbarkeit von D tritt auch ganz F' als Bild von D auf. Die Pseudounitarität von D sichert die Normerhaltung $\langle \phi | D^\dagger D | \phi \rangle = \langle \phi | \phi \rangle$. Sind weiter $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, so folgt $D_1 D_2 \in \mathcal{D}$, denn zieht man nach einer Regel von 0.2.d die Exponenten des Produktes zusammen, tritt im Exponenten ein Kommutatorterm auf, der in die Phase übernommen werden kann, da er sich als rein imaginär erweist.

Zu b): Man benutzt die in 0.2.d mitgeteilte Regel für $e^A B e^{-A}$, die anwendbar ist, weil im vorliegenden Fall stets $[A, B] \in \mathcal{F}$.

Zu c): Mit $|\phi_0\rangle = D^*|\phi\rangle$ gilt nach (1.4/2):

$$\langle \phi_0 | a_\mu(\underline{k}) | \phi_0 \rangle = \langle \phi | D a_\mu(\underline{k}) D^* | \phi \rangle = \langle \phi | a_\mu(\underline{k}) | \phi \rangle - \delta_\mu(\underline{k}) \langle \phi | \phi \rangle.$$

Die Wahl $\delta_\mu(\underline{k}) =: \frac{\langle \phi | a_\mu(\underline{k}) | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle}$ sichert eindeutig, daß $|\phi_0\rangle \in \mathcal{F}^0$. Nach 1.1 ist auch sichergestellt, daß $\delta_\mu(\underline{k}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ für alle μ ist.

Zu d): Folgt ebenfalls aus (1.4/2).

Zu e): Sei $n_{(\mu)}(\underline{k}) =: a_\mu^*(\underline{k}) a_\mu(\underline{k})$ ohne Summation über μ !
Dann folgt aus (1.4/2) und der Pseudounitarität von D:

$$\langle \phi | n_{(\mu)}(\underline{k}) | \phi \rangle = \langle \phi_0 | D^* a_\mu^*(\underline{k}) D D^* a_\mu(\underline{k}) D | \phi_0 \rangle =$$

$$\langle \phi_0 | \{ a_\mu^*(\underline{k}) + \delta_\mu^*(\underline{k}) \} \{ a_\mu(\underline{k}) + \delta_\mu(\underline{k}) \} | \phi_0 \rangle =$$

$$\langle \phi_0 | n_{(\mu)}(\underline{k}) | \phi_0 \rangle + \delta_\mu^*(\underline{k}) \delta_\mu(\underline{k}) \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle.$$

Ohne
Summation
über
Index μ !

Mit $\langle \phi | \phi \rangle = \langle \phi_0 | \phi_0 \rangle$ und $\delta_\mu^*(\underline{k}) \delta_\mu(\underline{k}) = g_{\mu\mu} |\delta_\mu(\underline{k})|^2$ folgt daraus die Behauptung.

Zu f): Die Normierung auf 1 folgt aus der gleichartigen Normierung für $|0\rangle$ (vgl. 1.3/8). Nach (1.4/2) ist weiter

$$a_\mu(\underline{k}) |D\rangle = D D^* a_\mu(\underline{k}) D |0\rangle = D \{ a_\mu(\underline{k}) + \delta_\mu(\underline{k}) \} |0\rangle = \delta_\mu(\underline{k}) \cdot D |0\rangle.$$

Ebenfalls nach (1.4/2) erhält man

$$\langle 0 | D^* n(\underline{k}) D |0\rangle = \langle 0 | D^* a_\mu^*(\underline{k}) D D^* a_\mu(\underline{k}) D |0\rangle = \delta_\mu^*(\underline{k}) \delta_\mu(\underline{k})$$

$$\text{wegen } a_\mu(\underline{k}) |0\rangle = 0 = \langle 0 | a_\mu^*(\underline{k}).$$

Die Form (1.4/13) eines Glauberzustandes gewinnt man nach der zweiten Rechenregel von 0.2.d, indem man Operatortermine mit $a_\mu^*(\underline{k})$ bzw. $a_\mu(\underline{k})$ in getrennte Exponenten schreibt und die Vakumeigenschaft $a_\mu(\underline{k}) |0\rangle = 0$ benutzt.

§ 2) Unterräume mit Lorentzbedingung.

2.1: Die Lorentzbedingung.

Der Raum $(F', \langle | \rangle)$ enthält wegen seiner formalen Definition sehr viele physikalisch bedeutungslose Vektoren. Erst Unterräume, für deren Vektoren $|\phi\rangle$ allgemein gilt $\langle \phi | \phi \rangle \geq 0$ ($\langle \phi | \phi \rangle = 0$ muß nicht $|\phi\rangle = 0$ zur Folge haben), liegen der physikalischen Interpretierbarkeit näher, weil in ihnen die CS - Ungleichung $|\langle \phi | \psi \rangle|^2 \leq \langle \phi | \phi \rangle \langle \psi | \psi \rangle$ gilt (z. B. [15], S. 84), welche $|\langle \phi | \psi \rangle_n|^2 \leq 1$ für die normierten Vektoren zur Folge hat. Dies ist notwendig, um $|\langle \phi | \psi \rangle_n|^2$ als Wahrscheinlichkeit interpretieren zu können. Nebenbei bemerkt hat die CS - Ungleichung auch zur Folge, daß bezüglich eines Vektors $|\phi'\rangle$ mit $\langle \phi' | \phi' \rangle = 0$ gilt: $\langle \psi | \phi' \rangle = 0$ für alle $|\psi\rangle$ aus dem betrachteten Raum positiv - semidefiniter Metrik. Wir werden diese Bemerkung in 2.2 wieder aufgreifen mit dem Ziel, eine Äquivalenzrelation einzuführen.

Um nun zu positiv - semidefiniten Unterräumen von $(F', \langle | \rangle)$ zu kommen, greifen wir aus der (a_μ) - Nullfaser die Menge aller Vektoren $|\phi_0\rangle$ heraus, für die gilt:

$$L(\underline{k})|\phi_0\rangle = 0 \text{ mit } L(\underline{k}) = k^\nu a_\nu(\underline{k}). \quad (2.1/1)$$

(2.1/1) ist als Lorentzbedingung für den wechselwirkungsfreien Fall lange bekannt (z. B. [7], [8], [12]); sie wird in der Literatur gewöhnlich im Heisenbergbild gestellt, überträgt sich wegen der speziellen Form (3/2) des freien Hamiltonoperators aber unverändert in das hier verwendete Schrödingerbild.

Um nun (2.1/1) auf Vektoren außerhalb der (a_μ) - Nullfaser zu verallgemeinern, schreiben wir nach (1.4/3,4)

$$|\phi\rangle = D|\phi_0\rangle, \quad D \in \mathcal{D}, \quad \langle \phi_0 | a_\mu(\underline{k}) | \phi_0 \rangle = 0$$

und wenden $L(\underline{k})$ auf $|\phi\rangle$ an mit dem Ergebnis

$$L(\underline{k})|\phi\rangle = L(\underline{k})D|\phi_0\rangle = DD^\dagger L(\underline{k})D|\phi_0\rangle =$$

$$D \{ L(\underline{k}) + k^V \delta_V(\underline{k}) \} |\phi_0\rangle = DL(\underline{k})|\phi_0\rangle + k^V \delta_V(\underline{k})|\phi\rangle .$$

Soll also eine (2.1/1) verallgemeinernde Bedingung aufgestellt werden, die entweder für alle Vektoren (nichtverschwindender Norm) einer Normfaser gilt oder für keinen von ihnen, so wird man zwangsläufig auf die Forderung an $|\phi\rangle$ geführt:

$$\{ L(\underline{k}) - k^V \delta_V(\underline{k}) \} |\phi\rangle = 0, \quad (2.1/2)$$

$$\text{wobei} \quad \delta_V(\underline{k}) = \frac{\langle \phi | a_V(\underline{k}) | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} .$$

(2.1/2) nennen wir (verallgemeinerte) Lorentzbedingung. Wie im Zusammenhang mit den später einzuführenden Schrödingerkurven gezeigt werden kann (Abschnitt 3.4), ist sie eine Verallgemeinerung der Lorentzbedingung der klassischen Elektrodynamik.

Ein Vektor nichtverschwindender Norm aus F' erfüllt die Lorentzbedingung (2.1/2) genau dann, wenn er Eigenvektor von $L(\underline{k})$ für alle $\underline{k}$ ist. Auf Grund von (1.4/11) erfüllt jeder Glauberzustand die Lorentzbedingung.

Die Menge der Eigenvektoren von $L(\underline{k})$ stellt nun im allgemeinen keinen Vektorraum dar. Man muß daher zu jeder denkbaren Eigenwertfunktion $l = l(\underline{k})$ von $L(\underline{k})$ einen eigenen Vektorraum in folgender Weise konstruieren:

Unter dem Lorentzraum $F_L(l)$ zur Skalarfunktion $l = l(\underline{k})$ verstehen wir die Menge

$$\{ |\phi\rangle \in (F', \langle \cdot | \cdot \rangle) \mid L(\underline{k})|\phi\rangle = l(\underline{k})|\phi\rangle \} .$$

Die Lorentzräume $F_L(l)$, insbesondere der Raum $F_L(0)$, besitzen einige wichtige Eigenschaften, die wir im folgenden beweisen. Die erste dieser Eigenschaften wurde für den Spezialfall $F_L(0)$ bereits von Gupta und Bleuler angegeben. Auch [8] und [12] enthalten den Satz, daß aus (2.1/1) positiv - semidefinite Norm des hier $F_L(0)$ genannten Raumes folgt.

a) Für alle l ist $F_L(l)$ positiv - semidefinit unter der Gupta - Bleuler - Form.

b) Für $|\phi\rangle \in F_L(1)$ mit $\langle\phi|\phi\rangle \neq 0$ gilt stets

$$\frac{\langle\phi|m_{(0)}(\underline{k})|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} \leq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\langle\phi|m_{(r)}(\underline{k})|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} \geq 0 \quad (r = 1, 2, 3). \quad (2.1/3)$$

c) Für $|\phi\rangle \in F_L(0)$ mit $\langle\phi|\phi\rangle \neq 0$ gilt auch

$$\frac{\langle\phi|m(\underline{k})|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} \geq 0. \quad (2.1/4)$$

Damit zeigt die Photonendichte erst in den Lorentzräumen die erwarteten Eigenschaften. Inwieweit der Erwartungswert von $n(\underline{k})$ auch für Vektoren aus $F_L(1)$ mit $l \neq 0$ nicht-negativ bleibt, hängt von den jeweiligen Vierervektoren $\delta_v(\underline{k})$ ab. In diesem Punkt wird erst eine genauere Untersuchung dieser δ_v Klarheit schaffen (Abschnitt 4.7).

Zum Beweis:

Einer üblichen Methode zunächst folgend (z. B. [8]) schreiben wir mit reellen "Polarisationsvektoren" $e_\mu^{(\lambda)}(\underline{k})$, $\lambda = 0, \dots, 3$ die Operatoren $a_\mu(\underline{k})$, $a_\mu^*(\underline{k})$ in folgender Form:

$$a_\mu(\underline{k}) = \sum_{\lambda=0}^3 e_\mu^{(\lambda)}(\underline{k}) a^{(\lambda)}(\underline{k}); \quad a_\mu^*(\underline{k}) = \sum_{\lambda=0}^3 e_\mu^{(\lambda)}(\underline{k}) a^{(\lambda)*}(\underline{k}). \quad (2.1/5)$$

Die Polarisationsvektoren sollen orthonormiert sein gemäß

$$e_\mu^{(\lambda)}(\underline{k}) e^{(\lambda')\mu}(\underline{k}) = g^{\lambda\lambda'}. \quad (2.1/6)$$

Die besondere Wahl ($r = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} e_0^{(0)}(\underline{k}) &= 1; \quad e_\tau^{(0)}(\underline{k}) = 0; \quad e_\tau^{(4)}(\underline{k}) e^{(4)\tau}(\underline{k}) = 1 = e_\tau^{(2)}(\underline{k}) e^{(2)\tau}(\underline{k}); \\ e_0^{(4)}(\underline{k}) &= 0 = e_0^{(2)}(\underline{k}); \quad k^\tau e_\tau^{(4)}(\underline{k}) = 0 = k^\tau e_\tau^{(2)}(\underline{k}); \\ e_0^{(3)}(\underline{k}) &= 0; \quad e_\tau^{(3)}(\underline{k}) = \frac{k_\tau}{k_0}; \quad e_\tau^{(4)}(\underline{k}) e^{(2)\tau}(\underline{k}) = 0; \end{aligned} \quad (2.1/7)$$

erfüllt (2.1/6) und induziert bezüglich der neuen Operatoren $a^{(\lambda)}(\underline{k})$ die Vorstellung von Vernichtungsoperatoren für skalare ($\lambda = 0$), transversale ($\lambda = 1, 2$) und longitudinale ($\lambda = 3$) Photonen. Als Vertauschungsrelationen gelten:

$$[a^{(\lambda)}(\underline{k}), a^{*(\lambda')}(\underline{l})] = g^{\lambda\lambda'} \delta(\underline{k} - \underline{l}). \quad (2.1/8)$$

Der Lorentzoperator $L(\underline{k})$ erhält durch (2.1/5-7) die spezielle Form

$$L(\underline{k}) = k_0 \{ a^{(3)}(\underline{k}) - a^{(0)}(\underline{k}) \}. \quad (2.1/9)$$

Wir benutzen die Beziehungen (2.1/5-9) zum Beweis der Behauptungen a, b, c:

Zu a):

Wir haben zu zeigen, daß aus (2.1/2) stets folgt: $\langle \Phi | \Phi \rangle \geq 0$. Weil sich $|\Phi\rangle$ stets als $D|\Phi_0\rangle$ mit $|\Phi_0\rangle$ aus der (a_μ) - Nullfaser, hier also aus $F_L(0)$ schreiben läßt und weil dann $|\Phi\rangle$ und $|\Phi_0\rangle$ gleiche Norm haben, genügt es, die Behauptung für einen beliebigen Vektor aus $F_L(0)$ zu beweisen. Nach (2.1/1) und (2.1/9) gilt dann

$$a^{(0)}(\underline{k}) |\Phi\rangle = a^{(3)}(\underline{k}) |\Phi\rangle. \quad (2.1/10)$$

Gelte nun nach (1.3/9) $\Phi_{\mu_1 \dots \mu_n}(\underline{k}_1 \dots \underline{k}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | a_{\mu_1}(\underline{k}_1) \dots a_{\mu_n}(\underline{k}_n) | \Phi \rangle$.

Dann folgt mit (1.2/1): $\langle \Phi | \Phi \rangle = \Phi^* \Phi +$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_n \\ \tau_1, \dots, \tau_n}}^3 \int d\underline{k}_1 \dots d\underline{k}_n e_{\mu_1}^{(\lambda_1)} e^{(\tau_1)\mu_1} \dots \langle \Phi | a^{*(\tau_1)}(\underline{k}_1) \dots | 0 \rangle \langle 0 | a^{(\lambda_1)}(\underline{k}_1) \dots | \Phi \rangle =$$

$$\Phi^* \Phi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n=0}^3 \int d\underline{k}_1 \dots d\underline{k}_n g^{\lambda_1 \lambda_1} \dots g^{\lambda_n \lambda_n} \langle \Phi | a^{*(\lambda_1)} \dots a^{*(\lambda_n)} | 0 \rangle \langle 0 | a^{(\lambda_1)} \dots a^{(\lambda_n)} | \Phi \rangle.$$

In dieser Summe können höchstens solche Summanden negativ sein, bei denen wenigstens ein $\lambda_\mu = 0$ ist. Sei etwa $\lambda_1 = 0$. Dann treten in der Summe die folgenden beiden Terme auf:

$$g^{00} g^{\lambda_1 \lambda_2} \dots g^{\lambda_n \lambda_n} \langle \phi | \hat{a}^{(0)*} \hat{a}^{(\lambda_1)*} \dots \hat{a}^{(\lambda_n)*} | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}^{(\lambda_1)} \dots \hat{a}^{(\lambda_2)} \hat{a}^{(0)} | \phi \rangle +$$

$$g^{33} g^{\lambda_1 \lambda_2} \dots g^{\lambda_n \lambda_n} \langle \phi | \hat{a}^{(3)*} \hat{a}^{(\lambda_2)*} \dots \hat{a}^{(\lambda_n)*} | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}^{(\lambda_n)} \dots \hat{a}^{(\lambda_2)} \hat{a}^{(3)} | \phi \rangle.$$

Wegen (2.1/10) kann das umgeformt werden zu

$$- g^{\lambda_1 \lambda_2} \dots g^{\lambda_n \lambda_n} \langle \phi | \hat{a}^{(3)*} \hat{a}^{(\lambda_2)*} \dots \hat{a}^{(\lambda_n)*} | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}^{(\lambda_n)} \dots \hat{a}^{(\lambda_2)} \hat{a}^{(3)} | \phi \rangle +$$

$$+ g^{\lambda_1 \lambda_2} \dots g^{\lambda_n \lambda_n} \langle \phi | \hat{a}^{(3)*} \hat{a}^{(\lambda_2)*} \dots \hat{a}^{(\lambda_n)*} | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}^{(\lambda_n)} \dots \hat{a}^{(\lambda_2)} \hat{a}^{(3)} | \phi \rangle.$$

In dieser Weise wird jeder Summand in $\langle \phi | \phi \rangle$, der überhaupt nur negativ werden kann, durch einen entsprechenden positiven Term annulliert.

Zu b):

Wegen 1.4.e genügt es, die Behauptung nur für die Vektoren der (a_μ) - Nullfaser zu beweisen. Für diese Vektoren gilt dann (2.1/10), denn sie gehören zu $F_L(0)$. Bis auf weiteres werde über den Index μ nicht summiert. Dann ist der Erwartungswert von $n_{(\mu)}(\underline{k}) = a_\mu^*(\underline{k}) a^\mu(\underline{k})$ nach (1.2/1) und (1.3/1) gleich

$$\Phi_\mu^*(\underline{k}) \Phi^\mu(\underline{k}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \int d^3 k_1 \dots d^3 k_n \Phi_{\mu \mu_1 \dots \mu_n}^*(\underline{k}, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \Phi^{\mu \mu_1 \dots \mu_n}(\underline{k}, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n)$$

Mit $\Phi_{\mu \mu_1 \dots \mu_n}(\underline{k}, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) = \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \langle 0 | a_\mu \dots a_{\mu_n} | \phi \rangle$ entsteht zunächst

$$\Phi_\mu^*(\underline{k}) \Phi^\mu(\underline{k}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3 k_1 \dots d^3 k_n \langle \phi | \hat{a}_{\mu_n}^* \dots \hat{a}_\mu^* | 0 \rangle \langle 0 | a^\mu \dots a^{\mu_n} | \phi \rangle.$$

Neben $|\phi\rangle$ ist auch $a^\mu(\underline{k})|\phi\rangle =: |\tilde{\phi}\rangle$ ein Vektor aus $F_L(0)$, denn $L(\underline{k})$ und $a^\mu(\underline{k})$ sind vertauschbar. Unter Verwendung von $|\tilde{\phi}\rangle$ wird $\langle \phi | n_{(\mu)}(\underline{k}) | \phi \rangle = \Phi_\mu^*(\underline{k}) \Phi^\mu(\underline{k}) +$

$$g_{\mu\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3 k_1 \dots d^3 k_n \langle \tilde{\phi} | \hat{a}_{\mu_n}^* \dots \hat{a}_{\mu_1}^* | 0 \rangle \langle 0 | a^{\mu_1} \dots a^{\mu_n} | \tilde{\phi} \rangle$$

und mit (2.1/5,6) entsteht schließlich $\Phi_\mu^*(\underline{k}) \Phi^\mu(\underline{k}) +$

$$g_{\mu\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3 k_1 \dots d^3 k_n \sum_{\lambda_1 \dots \lambda_n=0}^3 g^{\lambda_1 \lambda_1} \dots g^{\lambda_n \lambda_n} \langle \tilde{\phi} | \hat{a}^{(\lambda_1)*} \dots \hat{a}^{(\lambda_n)*} | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}^{(\lambda_n)} \dots \hat{a}^{(\lambda_1)} | \tilde{\phi} \rangle.$$

Nach der zu a) angewandten Schlußweise ist aber

$$\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n=0}^3 g^{\lambda_1 \lambda_1} \dots g^{\lambda_n \lambda_n} \langle \tilde{\phi} | \hat{a}^{(\lambda_1)} \dots | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}^{(\lambda_1)} \dots | \tilde{\phi} \rangle \geq 0,$$

denn zu jedem negativen Summanden gibt es einen ihn kompensierenden positiven. Somit sind die Behauptungen zu $\mu = 0$ und $\mu = 1, 2, 3$ bewiesen.

Zu c):

Die Summationskonvention für μ gelte nun wieder. Zunächst ist $\phi_\mu^*(\underline{k}) \phi^\mu(\underline{k}) \geq 0$, denn dies hat den Wert

$$\frac{1}{2} \langle \phi | \hat{a}_\mu^*(\underline{k}) | 0 \rangle \langle 0 | a^\mu(\underline{k}) | \phi \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \tau=0}^3 e_\mu^{(\lambda)} e^{(\tau)\mu} \langle \phi | \hat{a}^{(\lambda)} | 0 \rangle \langle 0 | a^{(\tau)} | \phi \rangle$$

und ergibt mit (2.1/6-9)

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^3 g^{\lambda\lambda} \langle \phi | \hat{a}^{(\lambda)} | 0 \rangle \langle 0 | a^{(\lambda)} | \phi \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^2 \langle \phi | \hat{a}^{(\lambda)} | 0 \rangle \langle 0 | a^{(\lambda)} | \phi \rangle \geq 0.$$

Auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3\vec{k}_1 \dots d^3\vec{k}_n \langle \phi | \hat{a}_\mu^* \hat{a}^{\mu_1} \dots | 0 \rangle \langle 0 | a^\mu a^{\mu_1} \dots | \phi \rangle$ ist ≥ 0 ,

denn es ist nach (2.1/6) gleich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^3\vec{k}_1 \dots d^3\vec{k}_n \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n=0}^3 g^{\lambda_1 \lambda_1} g^{\lambda_2 \lambda_2} \dots g^{\lambda_n \lambda_n} \langle \phi | \hat{a}^{(\lambda_1)} \hat{a}^{(\lambda_2)} \dots | 0 \rangle \langle 0 | a^{(\lambda_1)} \dots | \phi \rangle$$

Wieder mit den zu a) benutzten Schlüssen zeigt man unter Verwendung von (2.1/10), daß negative Summanden in dieser Summe jeweils kompensiert werden.

Nach den Sätzen b) und c) haben nun auch die Photonen-gesamtzahlen $N_{(0)} = \int d^3\vec{k} \hat{a}_0^*(\underline{k}) \hat{a}_0(\underline{k})$ und $N_{(r)} = \int d^3\vec{k} \hat{a}_r^*(\underline{k}) \hat{a}_r(\underline{k})$, $r = 1, 2, 3$ (ohne Summation), nichtpositive bzw. nicht-negative Erwartungswerte in $F_L(1)$. Über den Erwartungswert von $N = \int d^3\vec{k} \hat{a}_\nu^* \hat{a}^\nu$ läßt sich für $1 \neq 0$ keine allgemeine Aussage machen (vgl. jedoch Abschnitt 4.7).

In diesem Zusammenhang ist von Interesse, daß - unabhängig von der Lorentzbedingung - zwischen dem Erwartungswert von $N_{(0)}$ im Zustand $|\phi\rangle$ und der Norm von $|\phi\rangle$

folgender Zusammenhang besteht:

Aus $\langle \phi | N_{(0)} | \phi \rangle = 0$ folgt $\langle \phi | \phi \rangle \geq 0$.

Zum Beweis bestimmen wir mit den Fockraumkomponenten

$$\begin{aligned} & \Phi_{\mu_1 \dots \mu_n}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \quad \text{von } |\phi\rangle \text{ das Skalarprodukt } \langle \phi | N_{(0)} | \phi \rangle = \\ & \int d^3k \Phi_0^*(\underline{k}) \Phi_0(\underline{k}) + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \int d^3k_1 \dots d^3k_n \Phi_{0\mu_1 \dots \mu_n}^* \Phi^{0\mu_1 \dots \mu_n} = \\ & \sum_{n=0}^{\infty} (!) \int d^3k_1 \dots d^3k_{n+1} \Phi_{\mu_1 \dots \mu_{n+1}}^*(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_{n+1}) \Phi^{\mu_1 \dots \mu_{n+1}}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_{n+1}), \end{aligned}$$

wobei das (!) am Summationszeichen darauf hinweist, daß in der Summe ein $(n+1)$ - Tupel $\mu_1, \dots, \mu_{n+1}$ nur dann auftreten soll, wenn ihm wenigstens einmal der Index 0 angehört.

Diese nach Voraussetzung verschwindende Summe enthält aber bereits alle Terme, die in der Norm $\langle \phi | \phi \rangle$ überhaupt nur negativ werden können.

2.2: Restklassenbildung in den Lorentzräumen.

Nach 2.1 besitzen alle Lorentzräume $F_L(1)$ positiv - semi-definite Metrik. Sind $l(\underline{k})$ und $l'(\underline{k})$ zwei verschiedene $\underline{k}$ -Funktionen, so ist $F_L(1) \cap F_L(1') = \{0\}$. Beide Bemerkungen könnte man zum Anlaß nehmen, das lineare Erzeugnis aller oder wenigstens gewisser $F_L(1)$ als Unterraum von $(F', \langle \cdot | \cdot \rangle)$ einzuführen. Jeder Vektor dieses neuen Unterraumes würde sich eindeutig als Linearkombination von Vektoren aus den beteiligten Lorentzräumen schreiben lassen. Dennoch ist in dieser Weise kein Raum konstruierbar, auf dem die Gupta-Bleuler - Form positiv - semidefinit ist! Es gilt nämlich: Für $l(\underline{k}) \neq l'(\underline{k})$ besteht im linearen Erzeugnis der Räume $F_L(1)$ und $F_L(1')$ nicht einmal die CS - Ungleichung. Nehmen wir zum Beweis an, die CS - Ungleichung gelte. Dann hat sie zur Folge, daß ein Vektor der Norm 0 orthogonal zum ganzen linearen Erzeugnis steht. Seien nun die quadratintegrablen $g_V(\underline{k})$, $g'_V(\underline{k})$ so gewählt, daß nach (2.1/2) gilt: $l(\underline{k}) = k^V g_V(\underline{k})$, $l'(\underline{k}) = k^V g'_V(\underline{k})$. Gemäß (1.4/1) bestimmen g_V bzw. g'_V je einen Exponentialoperator G bzw. G' , deren Phasenfaktoren wir zu 1 festlegen. $\underline{l}$ sei weiterhin ein Impuls, für den $l(\underline{l}) \neq l'(\underline{l})$ ist.

$|N\rangle =: G L^*(\underline{l}) |0\rangle \in F_L(1)$ hat offenbar verschwindende Norm.
 $|G'\rangle =: G' |0\rangle \in F_L(1')$ ist Glauberzustand. Dann gilt:

$$\langle N | G' \rangle = \langle 0 | L(\underline{l}) G^* G' | 0 \rangle = \langle 0 | G^* G L(\underline{l}) G^* G' | 0 \rangle =$$

$$\langle 0 | G^* L(\underline{l}) G' | 0 \rangle - l(\underline{l}) \langle 0 | G^* G' | 0 \rangle =$$

$$\{l'(\underline{l}) - l(\underline{l})\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d\vec{k} [g_\mu^* g_\mu + g_\mu'^* g_\mu' - 2 \operatorname{Re}(g_\mu^* g_\mu')] \right\} \neq 0 !$$

Entgegen der Voraussetzung steht also $|N\rangle$ nicht zu jedem Vektor des linearen Erzeugnisses orthogonal, so daß in diesem die CS - Ungleichung (eine notwendige Voraussetzung für positiv - semidefinite Norm) nicht gelten kann.

Aber auch in der mengentheoretischen Vereinigung $\cup F_L(1)$ wenigstens zweier Lorentzräume kann es keinen positiv definiten Unterraum H geben, der nicht einfach Unterraum eines der Räume $F_L(1)$ ist:

Sei nämlich $|a\rangle, |b\rangle \in H$. Sind dann beide Vektoren linear abhängig, gehören sie trivialerweise zum selben $F_L(1)$. Nehmen wir also an, daß beide linear unabhängig sind. Dann ist $|c\rangle =: |a\rangle + |b\rangle \in H \subseteq \bigcup F_L(1)$, so daß es eine Funktion $l_c(\underline{k})$ mit $L(\underline{k})|c\rangle = l_c(\underline{k})|c\rangle$ geben muß. Andererseits ist $L(\underline{k})|c\rangle = l_a(\underline{k})|a\rangle + l_b(\underline{k})|b\rangle$. Daraus folgt $\{l_a - l_c\}|a\rangle + \{l_b - l_c\}|b\rangle = 0$, was wegen der linearen Unabhängigkeit nur für $l_a = l_c = l_b$ möglich ist. Die Vektoren gehören also in jedem Fall demselben Raum $F_L(1)$ an.

Diese Bemerkungen legen es nahe, auf eine Konstruktion von Oberräumen mehrerer $F_L(1)$ zu verzichten und statt dessen die Diskussion des allgemeinen Raumes $F_L(1)$ weiterzuführen. Hierin bestärkt uns noch die in 4.5 bewiesene Tatsache, daß bei j_μ - Wechselwirkung $l(\underline{k})$ eindeutig durch die vorgegebene Ladungsdichte definiert ist, wenn vorausgesetzt wird, daß eine in $F_L(1)$ startende Schrödingerkurve diesen Raum nicht verlassen soll. Es fällt dann aber auf, daß eine auch nur schwach zeitabhängige Ladungsdichte in den Rahmen eines einzigen Lorentzraumes nicht paßt: Eine zugehörige Schrödingerkurve würde durch mehrere Lorentzräume hindurchlaufen. Auf die angedeuteten Probleme kommen wir in 4.1 und 4.5 zurück.

Zu Beginn von 2.1 hatten wir auf Grund der CS - Ungleichung bereits festgestellt (und auf der vorhergehenden Seite ausgenutzt), daß ein Vektor der Norm 0 zum ganzen Raum positiv - semidefiniter Metrik orthogonal ist. Daraus folgt insbesondere, daß die Menge

$$N_L(1) =: \{|\phi\rangle \in F_L(1) \mid \langle \phi | \phi \rangle = 0\}$$

einen (linearen) Unterraum von $F_L(1)$ bildet. Diese Tatsache ermöglicht es, die übliche "Strahläquivalenz" im Hilbertraum zum folgenden Begriff der "Lorentzäquivalenz" im Raum $F_L(1)$ zu verallgemeinern:

Zwei Vektoren $|a\rangle, |b\rangle \in F_L(1)$ heißen lorentzäquivalent, in Zeichen: $|a\rangle \sim |b\rangle$, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $|n\rangle \in N_L(1)$ derart gibt, daß

$$|a\rangle = e^{i\alpha} |b\rangle + |n\rangle. \quad (2.2/1)$$

Wegen der Linearitätseigenschaft von $N_L(1)$ ist mit (2.2/1) eine Äquivalenzrelation eingeführt. Insbesondere sind je zwei Vektoren der Norm 0 lorentzäquivalent. Die Wahrscheinlichkeit $|\langle a|b\rangle|^2$ hängt nur noch von den Lorentzäquivalenzklassen von $|a\rangle$ und $|b\rangle$ ab. Die Lorentzäquivalenz erlaubt es dann, zum Restklassenraum $F_L^*(1)$ überzugehen:

$F_L^*(1)$ ist Prä - Hilbertraum.

Zum Beweis ist zunächst zu zeigen, daß die auf $F_L(1)$ definierte Gupta - Bleuler - Form auf $F_L^*(1)$ übertragen werden kann. Durchlaufen $|a\rangle, |b\rangle \in F_L(1)$ ihre jeweiligen Lorentzäquivalenzklassen, so ändert sich dabei $\langle a|b\rangle$ höchstens um einen Phasenfaktor, den man bereits bei der üblichen Strahläquivalenz im Hilbertraum negiert. Tun wir dies auch hier, ist die Gupta - Bleuler - Form auch auf $F_L^*(1)$ eindeutig definiert. Sie ist dort positiv definit. Zu zeigen ist noch, daß $F_L^*(1)$ separabel ist. Dieser Beweis ist zusammen mit Überlegungen zur Komplettierung von $F_L^*(1)$ in Anhang B enthalten.

Operatoren ω , die in $F_L(1)$ definiert sind, können genau dann auch in $F_L^*(1)$ definiert werden, wenn gilt:

$$\omega\{\mathbb{D}_\omega \cap N_L(\ell)\} \subseteq N_L(\ell).$$

Nur solche Operatoren sollten also weiterhin eine Rolle spielen. Andererseits nannten wir schon eingangs Gründe, die es zweckmäßig erscheinen lassen, jeden $F_L(1)$ für sich zu betrachten, aber keinen prin-

zipiell zu bevorzugen. Dies legt es nahe, in weiterer Einschränkung nur solche ω zuzulassen, die bei Anwendung auf $F_L(1)$ (soweit sie dort definiert sind) nicht aus $F_L(1)$ hinausführen. (Unter Umständen kann dies im konkreten Fall durch passende Beschränkung des Definitionsbereiches erreicht werden; vgl. hierzu Beispiel c) dieses Abschnittes). Schließlich soll ω eine meßbare Größe ausdrücken, also reelle Erwartungswerte besitzen. Wir setzen daher Pseudosymmetrie $\omega^* = \omega$ voraus.

Zusammengefaßt nennen wir eine Abbildung $\omega : F' \supseteq \mathbb{D}_\omega \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{W}_\omega \subseteq F$ eine Lorentzobservable, wenn für jede nach 2.1 denkbare Eigenfunktion $l = l(\underline{k})$ von $L(\underline{k})$ gilt:

- i) $\omega\{\mathbb{D}_\omega \cap N_L(l)\} \subseteq N_L(l);$
- ii) $\omega\{\mathbb{D}_\omega \cap F_L(l)\} \subseteq F_L(l);$
- iii) $\omega^* = \omega$

Die Lorentzobservablen bilden einen $\mathbb{R}$ - Vektorraum ($\mathbb{R}$ statt $\mathbb{C}$ wegen Bedingung iii), den wir mit $\Omega(F_L)$ bezeichnen.

Auf folgende Weise erhalten wir ein Kriterium, um von einem vorgelegten Operator zu entscheiden, ob er die Bedingung ii) erfüllt:

Sei $\omega \in \Omega(F_L)$ und $0 \neq |\phi\rangle \in F_L(1)$. Dann ist

$$L(\underline{k})\omega|\phi\rangle = \ell(\underline{k})\omega|\phi\rangle = \omega\ell(\underline{k})|\phi\rangle = \omega L(\underline{k})|\phi\rangle,$$

$$\text{also } [L(\underline{k}), \omega]|\phi\rangle = 0.$$

Ist umgekehrt für $|\phi\rangle \in F_L(l)$ die Beziehung

$$[L(\underline{k}), \omega]|\phi\rangle = 0 \text{ richtig, so folgt } L(\underline{k})\omega|\phi\rangle =$$

$$\omega L(\underline{k})|\phi\rangle = \omega\ell(\underline{k})|\phi\rangle = \ell(\underline{k})\omega|\phi\rangle, \text{ so da\ss } \omega \in \Omega(F_L)$$

ω erfüllt also genau dann die Forderung ii), wenn für alle $|\phi\rangle \in \mathbb{D}_\omega \cap \left\{ \bigcup_{\ell} F_L(\ell) \right\}$ gilt: $[L(\underline{k}), \omega]|\phi\rangle = 0.$ (2.2/2)

Beispiele:

- a) Das Viererpotential $A_\mu(\underline{x})$ erfüllt formal iii). ii) ist nicht erfüllt, denn

$$[L(\underline{k}), A_\mu(\underline{x})] = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2k_0)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}} k_\mu \neq 0.$$

Hierin kann man einen Ausdruck der Tatsache sehen, daß wegen des Auftretens von Eichtermen in der Erwartungswerten von A_μ dieser Operator keine unmittelbare physikalische Bedeutung hat.

- b) Die Operatoren der elektrischen und magnetischen Feldstärke:

Im Heisenbergbild ist bei Betrachtung des freien Falles das Viererpotential

$$A_\mu(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|}} [a_\mu(\underline{k}) e^{-ikx} + a_\mu^*(\underline{k}) e^{-ikx}]$$

und die elektromagnetische Feldstärke

$$F_{\mu\nu}(x) = A_{\mu|\nu}(x) - A_{\nu|\mu}(x), \text{ also}$$

$$F_{\mu\nu}(x) = i(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|}} \left\{ e^{-ikx} (a_\mu k_\nu - a_\nu k_\mu) + e^{-ikx} (a_\mu^* k_\nu - a_\nu^* k_\mu) \right\}.$$

Durch den Übergang $x_0 = 0$ ins Schrödingerbild erhalten wir dann

$$F_{\mu\nu}(\underline{x}) = i(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|}} \left\{ e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}} (a_\mu k_\nu - a_\nu k_\mu) + c.c. \right\} \quad (2.2/3)$$

(2.2/3) behalten wir als Definition der Operatoren der elektromagnetischen Feldstärken auch für den Fall der j_μ - Wechselwirkung bei, um den Operator nicht wechselwirkungsabhängig formulieren zu müssen. Wir kommen auf $F_{\mu\nu}(\underline{x})$ noch ausführlicher in Abschnitt 4.6 zurück.

Wegen $[L(\underline{k}), F_{\mu\nu}(\underline{x})] = 0$ ist ii) erfüllt. Ist $F_{\mu\nu}(\underline{x})$ auf $|\phi\rangle \in N_L(1)$ definiert, so ist für alle $|\psi\rangle \in F_L(1) \cap \mathcal{D}_{F_{\mu\nu}}$ stets $\langle \psi | F_{\mu\nu}(\underline{x}) | \phi \rangle =: \langle \psi | \phi \rangle = 0$ denn $|\psi\rangle =: F_{\mu\nu}^*(\underline{x}) |\psi\rangle = F_{\mu\nu}(\underline{x}) \in F_L(1)$. Daher ist auch i) erfüllt.

c) Die Photonendichte $n(\underline{k})$ erfüllt ii) wegen

$[L(\underline{k}), n(\underline{l})] = L(\underline{k}) \delta(\underline{k} - \underline{l})$ nur, wenn man den Definitionsbereich von $n(\underline{k})$ so beschränkt, daß $\mathbb{D}_{n(\underline{k})} \subseteq F_L(0)$ ist. Die gleiche Einschränkung ist dann für den freien Hamiltonoperator $H_0 =: \int d^3k \, k_0 n(\underline{k})$ zu machen; sie erscheint aber sehr natürlich.

Ist sodann $n(\underline{k})$ für $|\phi\rangle \in N_L(0)$ definiert und ebenso für $|\psi\rangle \in F_L(0)$, so ist $\langle \psi | n(\underline{k}) | \phi \rangle =: \langle \psi' | \phi \rangle = 0$, denn $|\psi'\rangle = n(\underline{k}) |\psi\rangle \in F_L(0)$. Also ist $n(\underline{k}) |\phi\rangle \in N_L(0)$.

H_0 ist übrigens unbeschränkter Operator (so daß die Bedingung ii) nicht etwa die Beschränktheit von ω fordert), auch wenn man seinen Definitionsbereich in $F_L(0)$ ansiedelt:

Als Beispiel wählen wir einen Glauberzustand (1.4/13) allein aus transversalen Photonen:

$$|F\rangle = \exp \int d^3k \sum_{v=1}^2 \left\{ -f^{(v)}(\underline{k}) \hat{a}^{(v)}(\underline{k}) + f^{(v)}(\underline{k}) \hat{a}^{(v)*}(\underline{k}) \right\} |0\rangle$$

Dieser ist auf +1 normiert und gehört zu $F_L(0)$, weil er offenbar durch $L(\underline{k}) = k_0 \{ \hat{a}^{(3)}(\underline{k}) - \hat{a}^{(0)}(\underline{k}) \}$ annulliert wird. Der Erwartungswert

$$\frac{\langle F | H_0 | F \rangle}{\langle F | F \rangle} = \int d^3k \, k_0 \sum_{v=1}^2 f^{(v)*}(\underline{k}) f^{(v)}(\underline{k})$$

übersteigt jedoch bei passender Wahl von $f^{(v)}(\underline{k}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ wegen des Faktors k_0 jede vorgegebene Schranke.

Erwähnenswert ist vielleicht noch, daß die Dichte der transversalen Photonen (2.1/5-7)

$$\sum_{v=1}^2 \hat{a}^{(v)*}(\underline{k}) \hat{a}^{(v)}(\underline{k})$$

die Bedingung ii) ohne jede Einschränkung des Definitionsbereiches erfüllt. Für die Dichte der skalaren oder longitudinalen Photonen allein gilt das nicht.

d) Zur Vierervektorfunktion $j_\mu(\underline{k}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ sei der pseudosymmetrische Operator

$$H_W =: \int d^3k \left\{ j_\mu^*(\underline{k}) a_\mu^*(\underline{k}) + j_\mu^*(\underline{k}) a_\mu^*(\underline{k}) \right\}$$

aus der Algebra $\bigcap (F')$ von 1.3.0 gegeben. Wegen $[L(\underline{k}), H_W] = k_\mu j_\mu^*(\underline{k})$ erfüllt H_W die Forderung ii) nur bei $k_\mu j_\mu^*(\underline{k}) \equiv 0$ (woraus übrigens $j_\mu^*(\underline{k}) j_\mu^*(\underline{k}) \geq 0$ folgt).

Den Begriff der Lorentzobservablen wollen wir im folgenden dazu benutzen, um die Lorentzäquivalenz in einer beweistechnisch einfacheren und physikalisch anschaulicheren Weise zu formulieren:

Seien $|a\rangle, |b\rangle \in F_L(1)$. Genau dann ist $|a\rangle \sim |b\rangle$, wenn eine der folgenden zwei Bedingungen erfüllt ist:

$$- \langle a|a \rangle = 0 = \langle b|b \rangle.$$

$$- \langle a|a \rangle \neq 0 \neq \langle b|b \rangle \text{ und}$$

$$\frac{\langle a|\omega|a \rangle}{\langle a|a \rangle} = \frac{\langle b|\omega|b \rangle}{\langle b|b \rangle} \quad \text{für jede Lorentzobservable } \omega. \quad (2.2/4)$$

Zum Beweis:

Wenn die beiden Vektoren nicht die Norm 0 haben, folgt aus (2.2/1) ohne weiteres (2.2/4). Sei nun umgekehrt (2.2/4) erfüllt. Als spezielle Lorentzobservable können wir in diese Gleichung den Projektor $\pi =: |b\rangle\langle b|$ einsetzen. π ist wirklich Lorentzobservable, denn $\pi N_L(1) = 0$, weil $|b\rangle \in F_L(1)$. Ferner ist natürlich $\pi F_L(1) \subseteq F_L(1)$ und $\pi^* = \pi$. Einsetzen von π in (2.2/4) führt dann zur Gleichung

$$|\langle a|b \rangle|^2 = \langle a|a \rangle \langle b|b \rangle.$$

Diese bleibt bestehen, wenn wir $|a\rangle$ und $|b\rangle$ unabhängig voneinander ihre jeweiligen Äquivalenzklassen nach (2.2/1)

durchlaufen lassen. Die Gleichung besteht also zwischen den beiden durch $|a\rangle$ und $|b\rangle$ repräsentierten Elementen von $F_L^*(1)$. Im Raum positiv - definiter Metrik kann eine solche Gleichung aber nur gelten, wenn die Elemente modulo Strahläquivalenz gleich sind (z. B. $[1]$, $[15]$). Insgesamt folgt daher, daß $|a\rangle$ und $|b\rangle$ eine Gleichung der Art (2.2/1) erfüllen.

Abschließend werde noch untersucht, wie sich die Lorentzäquivalenz im Bild der Normfasern und der (a_μ) - Fasern darstellt. Wir betrachten hierzu nicht den vollen Raum $(F', \langle | \rangle)$, sondern nur die mengentheoretische Vereinigung $F_L =: \bigcup_{\ell} F_L(1)$ aller Räume $F_L(1)$.

Sei dazu $|a\rangle = D_a |a_0\rangle \in F_L$ und $|b\rangle = D_b |b_0\rangle \in F_L$ mit $D_a, D_b \in \mathfrak{V}$ und $|a_0\rangle, |b_0\rangle \in F^0 (= a_\mu - \text{Nullfaser})$. Ferner sei $\langle a|a\rangle \neq 0 \neq \langle b|b\rangle$. Dann gilt:

a) Liegen $|a\rangle$ und $|b\rangle$ auf derselben (a_μ) - Faser, so ist $|a\rangle \sim_\ell |b\rangle$ genau dann, wenn $|a_0\rangle \sim_\ell |b_0\rangle$.

b) Liegen $|a\rangle$ und $|b\rangle$ auf derselben Normfaser, so ist $|a\rangle \sim_\ell |b\rangle$ genau dann, wenn gilt:

Es gibt eine komplexwertige Skalarfunktion $\varepsilon(\underline{k})$ mit $k_v \varepsilon(\underline{k}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ für jedes v derart, daß

$$|b\rangle = E |a\rangle \quad \text{und} \quad (2.2/5)$$

$$E = \exp \int d^3 \underline{k} \left[-\varepsilon^*(\underline{k}) L(\underline{k}) + \varepsilon(\underline{k}) L^*(\underline{k}) \right] \quad (2.2/6)$$

Mit $\mathcal{E}$ bezeichnen wir die Menge aller nach (2.2/6) konstruierbaren pseudounitären Operatoren E . $\mathcal{E}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{V}$ und zwar Darstellung der additiven Gruppe der komplexwertigen Skalarfunktionen $\varepsilon(\underline{k})$. Aus Gründen, die in Abschnitt 3.3 erörtert werden, nennen wir $\mathcal{E}$ die Eichgruppe zum Gupta - Bleuler - Raum.

Nach a) und b) sind die Restklassen von F_L im wesentlichen auf die Restklassen der (a_μ) - Nullfaser in F_L zurückgeführt, denn mit den eingeführten Bezeichnungen gilt:

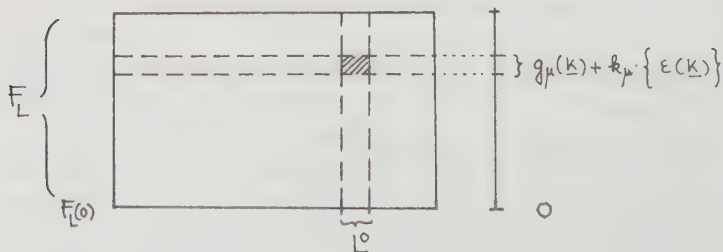
c) Es ist $|a\rangle \sim |b\rangle$ genau dann, wenn

$$|a_0\rangle \sim |b_0\rangle \quad \text{und} \quad D_a \cdot D_b^* \in \mathcal{E}. \quad (2.2/7)$$

Durch (2.2/7) wird es nahegelegt, auch in der Operatorgruppe $\mathcal{V}$ eine Lorentzäquivalenz einzuführen: Zwei Operatoren $D_a, D_b \in \mathcal{V}$ wären lorentzäquivalent zu nennen, wenn $D_a D_b^* \in \mathcal{E}$. Die Eichgruppe $\mathcal{E}$ selber würde die den Einheitsoperator von $\mathcal{V}$ enthaltende Restklasse darstellen.

Der in c) beschriebene Sachverhalt kann im Bilde von 1.4 folgendermaßen veranschaulicht werden:

Das schraffierte Rechteck der Skizze bezeichnet diejenige Restklasse, in der $|\Phi\rangle$ mit $\langle\Phi| a_\mu(\underline{k})|\Phi\rangle = \varepsilon_\mu \langle\Phi|\Phi\rangle$ liegt. L^0 ist die Restklasse in der (a_μ) - Nullfaser, die den Vektor $|\Phi_0\rangle$ enthält, über dem $|\Phi\rangle$ im Sinne der Normfaserung liegt.



Beweise:

Zu a): Mit den eingeführten Bezeichnungen ist nunmehr $D_a = D_b =: D$. Ist ω eine Lorentzobservable, so ist es auch der Operator $\omega' =: D \omega D^*$, denn: Wenn $|\Phi\rangle$ Eigenvektor zu $L(\underline{k})$ ist, so ist auch $D^*|\Phi\rangle$ Eigenvektor, weil mit

einem einzigen Vektor einer Normfaser definitionsgemäß auch alle übrigen Eigenvektoren von $L(\underline{k})$ sind. Weiterhin ist auch $\omega D^*|\phi\rangle$ Eigenvektor von L , denn ω ist Lorentzobservable. Endlich ist auch $D\omega D^*|\phi\rangle$ Eigenvektor zu L .

Wir zeigen nun zunächst: $\omega' =: D\omega D^*$ ist mit ω Lorentzobservable. Zum Beweis nehmen wir an, daß D durch die Vierervektorfunktion $\delta_\mu(\underline{k})$ laut (1.4/1) bestimmt ist. Dann berechnet man unter Verwendung von (1.4/2):

$$\begin{aligned} L(\underline{k})D\omega D^*|\phi\rangle &= D L(\underline{k})\omega D^*|\phi\rangle + [L(\underline{k}), D]\omega D^*|\phi\rangle = \\ &= D\omega L(\underline{k})D^*|\phi\rangle + k^\nu \delta_\nu(\underline{k}) D\omega D^*|\phi\rangle = \\ &= D\omega D^* L(\underline{k})|\phi\rangle + D\omega [L(\underline{k}), D^*]|\phi\rangle + k^\nu \delta_\nu(\underline{k}) D\omega D^*|\phi\rangle = \\ &= D\omega D^* L(\underline{k})|\phi\rangle - k^\nu \delta_\nu D\omega D^*|\phi\rangle + k^\nu \delta_\nu D\omega D^*|\phi\rangle = D\omega D^* L(\underline{k})|\phi\rangle. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $|\phi\rangle$ und $D\omega D^*|\phi\rangle$ gleiche Eigenwerte bezüglich $L(\underline{k})$ haben; Bedingung ii) von 2.2 gilt für ω' also. Die Forderungen i) und iii) von 2.2 sind für ω' übrigens trivialerweise erfüllt.

Nachdem also ω' als Lorentzobservable erwiesen ist und mit ω sämtliche Lorentzobservablen durchläuft (wegen der Pseudounitarität von D), gilt nach Voraussetzung

$$\frac{\langle a|\omega'|a\rangle}{\langle a|a\rangle} = \frac{\langle b|\omega'|b\rangle}{\langle b|b\rangle}, \quad \text{woraus folgt} \quad \frac{\langle a_0|\omega|a_0\rangle}{\langle a_0|a_0\rangle} = \frac{\langle b_0|\omega|b_0\rangle}{\langle b_0|b_0\rangle},$$

das heißt $|a_0\rangle \sim |b_0\rangle$.

Zu b):

Wir zeigen zunächst, daß mit $E \in \mathcal{E}$ jedenfalls folgt:
 $|\phi\rangle \sim_E |\phi\rangle$.

Ist nämlich $|\phi\rangle = D|\phi_0\rangle$, $\langle \phi_0|a_\mu(\underline{k})|\phi_0\rangle = 0$ und $\omega' = D^*\omega D$, so kann die Identität $\langle \phi_0|\omega'|\phi_0\rangle = \langle \phi_0|E^*\omega|E|\phi_0\rangle$ folgendermaßen gezeigt werden: Schreibt man die nach Reihenentwicklung von E entstehenden einzelnen Summanden von $\langle \phi_0|E^*\omega|E|\phi_0\rangle$ explizit hin, kommen neben $\langle \phi_0|\omega'|\phi_0\rangle$ Ausdrücke zustande, die Faktoren der Art $\langle \phi_0|L(\underline{k}_1) \cdots L(\underline{k}_r)\omega' L^*(\underline{\ell}_1) \cdots L^*(\underline{\ell}_s)|\phi_0\rangle$ enthalten, wobei mindestens einer der Indices l oder s nicht Null

ist. Alle diese Faktoren verschwinden aber, denn mit $|\phi_0\rangle \in F_L(0)$ ist zunächst $L^*(\underline{1}_1) \dots L^*(\underline{1}_s) |\phi_0\rangle \in F_L(0)$ und weiter dann auch $\omega^! L^*(\underline{1}_1) \dots L^*(\underline{1}_s) |\phi_0\rangle \in F_L(0)$, so daß (bei $r \neq 0$) bereits ein einziger Operator $L(\underline{k}_v)$ diesen Vektor zum Verschwinden bringt. Im Falle $r=0$ und $s \neq 0$ schließt man analog.

Bei festem $D \in \mathcal{V}$ durchläuft mit $\omega^!$ nun aber auch $\omega = D\omega^! D^*$ alle Lorentzobservablen. Wir haben also gezeigt: $\langle \phi | \omega | \phi \rangle = \langle \phi_0 | E^* D^* \omega D E | \phi_0 \rangle$. Die Vertauschung von E mit D und von E^* mit D^* bewirkt nur das Auftreten zweier sich kompensierender Phasenfaktoren, so daß endlich $\langle \phi | \omega | \phi \rangle = \langle \phi | E^* \omega E | \phi \rangle$ entsteht. Die Behauptung ist damit allgemein für $|\phi\rangle = D|\phi_0\rangle$ bewiesen.

Zu zeigen ist allerdings noch die Hauptsache, nämlich daß es wenigstens eine Lorentzobservable $\tilde{\omega}$ gibt, die, in (2.2/4) eingesetzt, die Form (2.2/6) für E erzwingt! Wir holen diesen Nachweis im Abschnitt 3.4 nach, indem wir für $\tilde{\omega}$ die Operatoren der elektromagnetischen Feldstärken verwenden.

Zu c):

Die Behauptung folgt aus a) und b) wegen der Eigenschaft von $\sim$, eine Äquivalenzrelation zu sein.

$$\phi^{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) = g^{\lambda_1 \lambda_1} \dots g^{\lambda_n \lambda_n} e^{(\lambda_1) \mu_1}(\underline{k}_1) \dots e^{(\lambda_n) \mu_n}(\underline{k}_n) \phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n). \quad (2.3/4)$$

Die $a^{(\lambda)}(\underline{k})$ lassen sich ja durch die $a_{\mu}(\underline{k})$ folgendermaßen ausdrücken:

$$a^{(\lambda)}(\underline{k}) = g^{\lambda \lambda} e^{(\lambda) \mu}(\underline{k}) a_{\mu}(\underline{k}). \quad (2.3/5)$$

Schreibt man $|\phi\rangle \in F'$ auch mit den durch (2.3/2) eingeführten Komponenten in Spaltenform:

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi^{(\lambda_1)}(\underline{k}_1) \\ \vdots \\ \phi^{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (2.3/6)$$

so gilt auf Grund von (2.1/5,6) und (1.3/1)

$$a^{(\lambda)}(\underline{k})|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{1} \phi^{(\lambda)}(\underline{k}) \\ \sqrt{2} \phi^{(\lambda, \lambda_1)}(\underline{k}, \underline{k}_1) \\ \vdots \\ \sqrt{n+1} \phi^{(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n)}(\underline{k}, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.3/7)$$

Demnach wird $|\phi\rangle$ durch $L(\underline{k}) = k_0 \left\{ a^{(3)}(\underline{k}) - a^{(0)}(\underline{k}) \right\}$ genau dann annulliert, wenn für alle $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$\begin{aligned} \phi^{(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n)}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_{i-1}, \underline{k}, \underline{k}_{i+1}, \dots, \underline{k}_n) = \\ \phi^{(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n)}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_{i-1}, \underline{k}, \underline{k}_{i+1}, \dots, \underline{k}_n). \end{aligned} \quad (2.3/8)$$

Als Transversalvektor bezeichnen wir nun einen Vektor $|\tau\rangle \in F'$, wenn seine nach (2.3/2) bestimmten Komponenten folgende Eigenschaft haben:

$$\phi^{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \text{ verschwindet für alle } \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n,$$

wenn der Indexmenge $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ wenigstens einer der Indices 0 oder 3 angehört.

Hieraus folgt, daß stets $L(\underline{k})|T\rangle = 0$ ist, also $|T\rangle \in F_L(0)$. Daß umgekehrt die transversalen Vektoren $|T\rangle$ auch ausreichen, um den Raum $F_L(0)$ im Sinne der Lorentzäquivalenz ausreichend zu beschreiben, besagen die folgenden Sätze:

- a) Zu jedem $|\phi\rangle \in F_L(0)$ gibt es transversale Vektoren $|T\rangle, |T_1^v\rangle, |T_2^v\rangle, \dots, v \in \mathbb{N}$, sowie Skalarfunktionen $\tau^v(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \in L^2(\mathbb{R}^{3n})$, so daß folgende Transversaldarstellung besteht:

$$|\phi\rangle = |T\rangle + \sum_{v,n=1}^{\infty} \int \frac{d^3\underline{k}_1 \dots d^3\underline{k}_n}{|\underline{k}_1| \dots |\underline{k}_n|} \tau^v(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) L^*(\underline{k}_1) \dots L^*(\underline{k}_n) |T_n^v\rangle \quad (2.3/9)$$

Hierin ist $|T\rangle$ durch $|\phi\rangle$ eindeutig bestimmt. $L^*(\underline{k})$ ist jeweils in der Form $k_0 \{ \tilde{a}^{(3)}(\underline{k}) - \tilde{a}^{(0)}(\underline{k}) \}$ verwendet.

- b) $|\phi\rangle$ ist zu $|T\rangle$ lorentzäquivalent. Jede Lorentzäquivalenzklasse von $F_L(0)$, also jeder Vektor von $F_L^*(0)$, wird eindeutig durch einen transversalen Vektor repräsentiert.
- c) Ist $|\phi\rangle \in F_L(0)$ und $|\phi\rangle \in F^0 (= a_\mu - \text{Nullfaser})$, so ist auch der zugehörige Vektor $|T\rangle$ aus der $(a_\mu) - \text{Nullfaser}$. Auch die Restklassen innerhalb der $(a_\mu) - \text{Nullfaser}$ werden daher durch transversale Vektoren aus ihr repräsentiert.
- d) Seien $|a\rangle, |b\rangle \in F_L(0)$ und $|T_a\rangle \sim |a\rangle, |T_b\rangle \sim |b\rangle$ die eindeutig zugeordneten transversalen Vektoren. Dann gilt:

$$\langle a|b \rangle = \langle T_a|T_b \rangle. \quad (2.3/10)$$

Daraus folgt noch einmal, daß die Norm eines Vektors aus $F_L(0)$ und damit aus $F_L(1)$ nichtnegativ ist.

e) Zu jeder normalgeordneten Lorentzobservablen $\omega \in \Omega(F_L)$ gibt es eine nur aus "transversalen" Operatoren $a^{*(1)}(\underline{k})$, $a^{*(2)}(\underline{l})$, $a^{*(1)}(\underline{m})$, $a^{*(2)}(\underline{n})$ aufgebaute Lorentz-observable ω_T , so daß die Erwartungswerte von ω und ω_T bezüglich eines jeden Vektors aus $F_L(0)$ übereinstimmen.

f) Sei $|\phi\rangle \in F_L(1)$ und $|\phi\rangle = D|\phi_0\rangle$ mit $D \in \mathcal{V}$ und $|\phi_0\rangle \in F_L(0)$; ferner sei $|\phi_0\rangle \sim_L |\tau_0\rangle$ und $|\tau_0\rangle$ transversaler Vektor.

Dann besteht die Lorentzäquivalenzklasse von $|\phi\rangle$ genau aus allen Vektoren der Art

$$D \left\{ |\tau_0\rangle + \sum_{\nu, n=1}^{\infty} \int \frac{d^3 k_1 \dots d^3 k_n}{|k_1| \dots |k_n|} \tau^\nu(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) L^*(\underline{k}_1) \dots L^*(\underline{k}_n) |\tau_n^\nu\rangle \right\}, \quad (2.3/11)$$

wobei $\tau^\nu(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \in L^2(\mathbb{R}^{3n})$ und $|\tau_n^\nu\rangle$, $\nu, n \in \mathbb{N}$, beliebige transversale Vektoren sind.

Wegen des in (2.3/11) auftretenden $D \in \mathcal{V}$ ist ein $|\phi\rangle \in F_L(l)$ bei $l \neq 0$ im allgemeinen nicht zu einem transversalen Vektor lorentzäquivalent.

Beweise:

Zu a):

Wir benutzen ausschließlich die Komponenten nach (2.3/2). $|\phi\rangle$ sei durch ϕ , $\phi^{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n)$, $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Die Komponenten der gesuchten transversalen Vektoren $|\tau_n^\nu\rangle$ bezeichnen wir mit

$$T_m^\nu, T_m^{\nu(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n).$$

Dem Beweis schicken wir zwei Vorbemerkungen voraus:

1. Es sei $L_S^2(\mathbb{R}^{3n}) \subset L^2(\mathbb{R}^{3n})$ der Unterraum aller gegenüber Permutationen der $\underline{k}_i$ invarianten quadratintegrierbaren Skalarfunktionen von $\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n$. Wegen der Separabilität von $L^2(\mathbb{R}^{3n})$ besitzt auch $L_S^2(\mathbb{R}^{3n})$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Basis. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wählen wir eine solche, $\{\tau^v(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n), v \in \mathbb{N}\}$ fest aus und identifizieren alle in der behaupteten Transversaldarstellung auftretenden τ^v -Funktionen mit diesen Basisfunktionen. Damit haben wir alle τ^v festgelegt.

2. Der Beweis ist geführt, wenn sich transversale Vektoren $|T\rangle$, $|T_n^v\rangle (n, v \in \mathbb{N})$ so wählen lassen, daß für jede Indexfolge $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ und jede Impulsfolge $\underline{\ell}_1, \dots, \underline{\ell}_r$ der Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{r!}} \langle 0 | a^{(\lambda_1)}(\underline{\ell}_1) \dots a^{(\lambda_r)}(\underline{\ell}_r) | T \rangle + \sum_{v, n=1}^{\infty} \left(\frac{d\underline{k}_1 \dots d\underline{k}_n}{|\underline{k}_1| \dots |\underline{k}_n|} \tau^v(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) L^*(\underline{k}_1) \dots L^*(\underline{k}_n) | T_n^v \rangle \right) \quad (2.3/12)$$

mit dem vorgegebenen $\Phi^{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}(\underline{\ell}_1, \dots, \underline{\ell}_r)$ übereinstimmt.

Das vorgegebene $| \Phi \rangle \in F_L(0)$ hat wegen der Lorentzbedingung die Eigenschaft, daß seine Komponenten

$\Phi^{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}(\underline{\ell}_1, \dots, \underline{\ell}_r)$ gegenüber Indexersetzungen $\lambda_i = 0 \longrightarrow \lambda_i = 3$ oder $\lambda_j = 3 \longrightarrow \lambda_j = 0$ invariant sind.

Auch der obige Ausdruck (2.3/12) hat diese Eigenschaft:

Wegen $[a^{(0)}(\underline{\ell}_i), L^*(\underline{k}_v)] = [a^{(3)}(\underline{\ell}_i), L^*(\underline{k}_v)]$ liefert $a^{(0)}(\underline{\ell}_i)$ beim Durchtauschen durch das Produkt der $L^*(\underline{k}_v)$ das gleiche Ergebnis wie $a^{(3)}(\underline{\ell}_i)$.

Wegen dieser Invarianz gegenüber Indexersetzungen $0 \longleftrightarrow 3$ genügt es, bei den weiteren Überlegungen stets nur Indices 0, 1, 2 in Betracht zu ziehen.

Bezüglich der Indexfolge $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ zu gegebenem $r \in \mathbb{N}$ diskutieren wir zum Beweis der Transversaldarstellung folgende Fälle:

A. Sei $0, 3 \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.

In diesem Fall geht (2.3/12) über in

$$\frac{1}{\sqrt{r!}} \langle 0 | a^{(\lambda_1)}(\underline{\ell}_1) \dots a^{(\lambda_r)}(\underline{\ell}_r) | T \rangle = T^{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}(\underline{\ell}_1, \dots, \underline{\ell}_r).$$

Setzt man also $T^{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}(\underline{\ell}_1, \dots, \underline{\ell}_r) = \Phi^{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}(\underline{\ell}_1, \dots, \underline{\ell}_r)$

für alle $r \in \mathbb{N}$, sowie $T = \langle 0|T \rangle = \phi = \langle 0|\phi \rangle$, so ist $|T\rangle$ eindeutig bestimmt und der Ansatz im vorliegenden Fall erfüllt.

B. Sei $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} = \{0, \dots, 0\}$.

Nach Vorbemerkung 2) sind hiermit auch alle Fälle erfaßt, in denen die Indices 0 und 3 in $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ gemischt auftreten. Mit den nach Vorbem. 1) fest gewählten τ^v -Funktionen geht (2.3/12) nunmehr über in

$$\sqrt{r!} \sum_{v=1}^{\infty} \tau^v(\underline{\ell}_1, \dots, \underline{\ell}_r) T_r^v$$

Diese Funktion sollte gleich dem gegebenen $\phi_{(\ell_1, \dots, \ell_r)}^{(0, \dots, 0)}$ sein. Diese letztere entstammt nach Definition aber $L_S^2(\mathbb{R}^{3r})$, kann also nach den Basisfunktionen $\tau^v(\underline{1}_1, \dots, \underline{1}_r)$ entwickelt werden. Erklärt man die Entwicklungskoeffizienten zu $\sqrt{r!} T_r^v$, so ist die gesuchte Gleichheit hergestellt.

C. Es bleibt noch der allgemeinere Fall zu behandeln, daß $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ die Indices 0, 1, 2 enthält. Der Fall, daß auch der Index 3 auftritt, kann nach Vorbem. 2) beiseite gelassen werden.

Sei also $\lambda_{v_1} = \dots = \lambda_{v_q} = 0$ ($1 \leq q \leq r$) und $0, 3 \notin \{\lambda_{v_{q+1}}, \dots, \lambda_{v_r}\}$.

Dann entsteht aus (2.3/12)

$$q! \sqrt{\frac{(r-q)!}{r!}} \sum_{v=1}^{\infty} \tau^v(\underline{\ell}_{v_1}, \dots, \underline{\ell}_{v_q}) T_q^v(\lambda_{v_{q+1}}, \dots, \lambda_{v_r})$$

$\phi_{(\ell_1, \dots, \ell_r)}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}$ gehört, wenn wir $\underline{\ell}_{v_{q+1}}, \dots, \underline{\ell}_{v_r}$ festgehalten denken, $L_S^2(\mathbb{R}^{3q})$ an, kann also nach der Basis $\tau^v(\underline{\ell}_{v_1}, \dots, \underline{\ell}_{v_q})$, $v \in \mathbb{N}$, entwickelt werden. Die Entwicklungskoeffizienten sind symmetrische Funktionen von $\underline{1}_{v_{q+1}}, \dots, \underline{1}_{v_r}$ und nach diesen Variablen

quadratintegrierbar. Die Entwicklungskoeffizienten können daher als

$$q! \sqrt{\frac{(r-q)!}{r!}} T^V(\lambda_{v_{q+1}}, \dots, \lambda_{v_r}) q(\underline{\lambda}_{v_{q+1}}, \dots, \underline{\lambda}_{v_r})$$

erklärt werden. Durch diese Festlegung stimmt der Ausdruck (2.3/12) auch im vorliegenden Fall mit

$$\phi^{(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}(\underline{\lambda}_1, \dots, \underline{\lambda}_r) \quad \text{überein.}$$

Insgesamt sind alle Komponenten der $|T_m^V\rangle$ und von $|T\rangle$ festgelegt, in deren Indexfolgen 0 und 3 nicht erscheinen. Erklären wir alle Komponenten dieser Vektoren zu Null, deren Indexfolge 0 oder 3 enthält, sind $|T\rangle$ und die $|T_m^V\rangle$ transversale Vektoren, wie behauptet.

Zu b):

Sei ω Lorentzobservable, so daß aus $L(\underline{k})|\phi\rangle = 0$ stets auch folgt: $L(\underline{k})\omega|\phi\rangle = 0 = \langle\phi| \omega L^*(\underline{k})$. Denkt man dann alle aus der Transversaldarstellung entstehenden Einzel-terme von $\langle\phi|\omega|\phi\rangle$ explizit hingeschrieben, so wird klar, daß nur $\langle T|\omega|T\rangle$ übrig bleibt; denn ein beliebiger sonstiger Summand enthält einen Faktor der Art

$$\langle T_r^V | L(\underline{\lambda}_1) \dots L(\underline{\lambda}_r) \omega L^*(\underline{\lambda}_1) \dots L^*(\underline{\lambda}_s) | T_s^{V'} \rangle,$$

wobei nur $r = s = 0$ ausgeschlossen ist. Ist $r \neq 0$, so wird der Vektor $\omega L^*(\underline{\lambda}_1) \dots L^*(\underline{\lambda}_s) | T_s^{V'} \rangle$, der mit $|T_s^{V'}\rangle$ wegen $[L, L^*] = 0$ und der Voraussetzung über ω aus $F_L(0)$ stammt, durch $L(\underline{k}_r)$ annulliert, so daß der Summand verschwindet. Für $r = 0 \neq s$ schließt man analog.

Daß zwei verschiedene transversale Vektoren nicht lorentzäquivalent sein können, folgt so: Die transversalen Vektoren bilden einen Raum positiv - definiter Metrik, der Unterraum von $F_L(0)$ ist. In einem solchen geht die Lorentzäquivalenz aber in die Identität (modulo Strahläquivalenz) über.

Zu c):

$|\phi\rangle$ liegt genau dann in der (a_μ) - Nullfaser, wenn $\langle\phi|a^{(\lambda)}(\underline{k})|\phi\rangle = 0$ für alle λ und $\underline{k}$ gilt. Entwickelt man $\langle\phi|a^{(\lambda)}(\underline{k})|\phi\rangle$ für $\lambda = 1$ und 2 gemäß der Transversaldarstellung, so entstehen neben $\langle T|a^{(\lambda)}(\underline{k})|T\rangle$ Terme, die allesamt wegen eines in ihnen auftretenden Operators L oder L^* verschwinden.

Zu d):

Denkt man wieder alle durch die Entwicklung gemäß (2.3/12) aus $\langle a|b\rangle$ entstehenden Einzelterme hingeschrieben, so wird klar, daß wegen der Lorentzbedingung zu $l \equiv 0$ und der Vertauschbarkeit von L mit L^* alle Summanden bis auf den angeschriebenen verschwinden.

Zu e):

In ω kann jeder Operator $a^{(0)}(\underline{k})$ zunächst durch $a^{(3)}(\underline{k}) - L(\underline{k})/k_0$ ersetzt werden, analog jeder $a^{*(0)}(\underline{l})$. $|\phi\rangle \in F_{\underline{L}}(0)$ ersetzen wir in $\langle\phi|\omega|\phi\rangle$ durch seinen zugeordneten transversalen Vektor $|T\rangle$. Wegen der Normalordnung verschwindet dann in $\langle T|\omega|T\rangle$ zunächst jeder L oder L^* enthaltende Term. Anschließend kann jedes in ω noch verbliebene $a^{(3)}(\underline{k})$, $a^{*(3)}(\underline{l})$ durch die $|T\rangle$ bzw. $\langle T|$ erzeugenden transversalen Operatoren bis zu $|0\rangle$ bzw. $\langle 0|$ getauscht werden.

Zu f):

Die Behauptung folgt aus den Möglichkeiten der Transversaldarstellung und der Normfaserung.

2.4: Schrödingerkurven.

Ein Hamiltonoperator H definiert zu jedem Vektor $|\phi\rangle \in F' \cap \mathbb{D}_H$ einen durch die differentielle Zeitspanne dt fixierten Nachbarvektor als

$$(1 - iHdt)|\phi\rangle. \quad (2.4/1)$$

Fährt man in diesem Sinne schrittweise fort, wird eine Folge $|\phi(t)\rangle$ von Vektoren aus F' mit t als Zeitparameter gewonnen, für welche die Schrödingergleichung

$$H|\phi(t)\rangle = i \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle \quad (2.4/2)$$

gilt. Vektorfolgen $|\phi(t)\rangle \in F'$ mit der Eigenschaft (2.4/2) nennen wir Schrödingerkurven in F' .

Wegen (2.4/1) startet in jedem Vektor $|\phi\rangle =: |\phi(t_0)\rangle \in F' \cap \mathbb{D}_H$ eine Schrödingerkurve; genau im Falle $H|\phi\rangle = 0$ ist sie entartet, das heißt: verläßt den Vektor $|\phi\rangle$ nicht.

Die durch H bestimmte Schrödingerkurve, welcher $|\phi\rangle \in F' \cap \mathbb{D}_H$ angehört, bezeichnen wir mit $\mathcal{V}_H(|\phi\rangle)$; für die durch H gegebene Schar aller Schrödingerkurven in F' führen wir das Zeichen $\mathcal{V}_H(F')$ ein. Wir zeigen zwei wichtige Eigenschaften der Schrödingerkurven:

- a) Sei H pseudosymmetrisch und $\{|a(t)\rangle\}, \{|b(t)\rangle\} \in \mathcal{V}_H(F')$.
Dann ist die Gupta - Bleuler - Form $\langle a(t) | b(t) \rangle$ zeitkonstant.

Den Beweis führt man wie den des entsprechenden Satzes über einen im Hilbertraum symmetrischen Hamiltonoperator:

$$i \frac{d}{dt} \langle a(t) | b(t) \rangle = \langle a(t) | H | b(t) \rangle - \langle a(t) | H^* | b(t) \rangle = 0.$$

Auch im Gupta - Bleuler - Raum ist also insbesondere die Norm $\langle \phi(t) | \phi(t) \rangle$ aller Vektoren einer Schrödingerkurve die gleiche.

b) Sei H pseudosymmetrisch und $|\phi(t_0)\rangle \in F_L(1)$.

Genau dann gilt $\mathcal{V}_H(|\phi(t_0)\rangle) \subseteq F_L(1)$, wenn H Lorentz-observable ist.

Wegen (2.4/1) ist nämlich

$$L(\underline{k})|\phi(t_0+dt)\rangle = L(\underline{k})|\phi(t_0)\rangle - idt L(\underline{k}) H |\phi(t_0)\rangle ,$$

$$\text{also } L(\underline{k})|\phi(t_0+dt)\rangle = L(\underline{k})|\phi(t_0+dt)\rangle =$$

$$L(\underline{k})|\phi(t_0)\rangle - idt H L(\underline{k})|\phi(t_0)\rangle$$

genau dann, wenn $[L(\underline{k}), H]|\phi(t_0)\rangle = 0$. Durch induktives Fortschreiten gewinnt man die Behauptung für alle Vektoren der Schrödingerkurve $\mathcal{V}_H(|\phi(t_0)\rangle)$. Die Bedingung $[L(\underline{k}), H]|\phi(t)\rangle = 0$ ist nach (2.2/2) mit 2.2.ii gleichbedeutend.

Nach a) und b) ist es also sehr zweckmäßig, zu fordern, daß H Lorentzobservable sein soll: Man garantiert damit nicht nur Normkonstanz längs jeder Schrödingerkurve, sondern auch, daß eine Schrödingerkurve einen Raum $F_L(1)$ nicht verläßt, in dem sie startet.

Unter welchen Voraussetzungen die im folgenden benutzten Hamiltonoperatoren Lorentzobservable sind, diskutieren wir in § 4, Einleitung und in Abschnitt 4.5.

§ 3) Der wechselwirkungsfreie Fall.

Im wechselwirkungsfreien Fall ist der Hamiltonoperator ($[6], [8], [12]$):

$$H_0 = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \pi_\mu(x) \pi^\mu(x) + \sum_{k=1}^3 A_\mu^{(k)}(x) A^{\mu(k)}(x) \right\}. \quad (3/1)$$

Wegen der formalen Ableitung $A_\mu^{(k)}(x)$ vgl. 2.2, Beispiel b) und 4.6. Mit (1.3/5,6) erhält man aus (3/1)

$$H_0 = \int d^3k \cdot k_0 a_\mu^*(\underline{k}) a^\mu(\underline{k}). \quad (3/2)$$

Sofern wir Lorentzräume $F_L(1)$ betrachten, werden wir nach 2.4 fordern, daß H_0 Lorentzobservable sein soll. Nach (2.2/2) ist hierzu der Definitionsbereich $\mathbb{D}_{H_0}$ so einzuschränken, daß für $|\Phi\rangle \in \mathbb{D}_{H_0}$ stets gilt:
 $[L(\underline{k}), H_0] |\Phi\rangle = 0$. Die Rechnung ergibt
 $[L(\underline{k}), H_0] = k_0 L(\underline{k})$, so daß $\mathbb{D}_{H_0} \cong F_L(0)$ zu wählen ist. Dies entspricht den zu (2.1/1) gemachten Vorbemerkungen.

3.1: Die Schrödingerkurven.

Startet im Vektor $|\Phi\rangle \in F'$ mit $t = 0$ eine Schrödingerkurve, so sind die Fockraumkomponenten des durch den Parameterwert t gegebenen Vektors $|\Phi(t)\rangle \in \mathcal{F}_{H_0}(|\Phi\rangle)$ folgendermaßen gegeben:

a) Φ ist zeitunabhängig;

$$b) \phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(k_1, \dots, k_n; t) = e^{-i\{ |k_1| + \dots + |k_n| \} t} \phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(k_1, \dots, k_n) \quad (3.1/1)$$

für $n \geq 1$.

Zum Beweis benutzt man $\frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0 | a_{\mu_1}(k_1) \dots a_{\mu_n}(k_n) H_0 | \Phi(t) \rangle =$
 $\sum_{v=1}^n |k_v| \phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(k_1, \dots, k_n; t) = i \frac{\partial}{\partial t} \phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(k_1, \dots, k_n; t).$
 $v=1$

Den Fockraumkomponenten von (3.1/1) ist unmittelbar anzusehen, daß - wie bereits allgemeiner gezeigt - die Norm eines Vektors konstant bleibt, wenn er sich auf seiner durch H_0 gegebenen Schrödingerkurve bewegt.

Zum Vergleich mit Ergebnissen des folgenden Abschnittes berechnen wir noch

$$\langle \Phi(t) | a_\mu(\underline{k}) | \Phi(t) \rangle = e^{-ik_0 t} \sum_{n=1}^{\infty} \int d\underline{k}_1 \dots d\underline{k}_n \Phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}^*(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \Phi_{\mu}^{\mu_1, \dots, \mu_n}(\underline{k}, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n)$$

$= e^{-ik_0 t} \epsilon_\mu(\underline{k})$, worin $\epsilon_\mu(\underline{k})$ ein zeitunabhängiger Vierervektor ist. Für spätere Zwecke (4.2) ist anzumerken, daß die eben erhaltene Art der Zeitabhängigkeit von $\langle \Phi(t) | a_\mu(\underline{k}) | \Phi(t) \rangle = \langle \Phi(x_0) | a_\mu(\underline{k}) | \Phi(x_0) \rangle =: \epsilon_\mu(\underline{k}, x_0)$ auch wie folgt gewonnen werden kann:

Anwendung der Schrödingergleichung liefert

$$i \dot{\epsilon}_\mu(\underline{k}, x_0) = - \langle \Phi(x_0) | [H_0, a_\mu(\underline{k})] | \Phi(x_0) \rangle = k_0 \epsilon_\mu(\underline{k}, x_0),$$

so daß für $\epsilon_\mu(\underline{k}, x_0)$ die partielle Differentialgleich.

$$i \dot{\epsilon}_\mu(\underline{k}, x_0) - k_0 \epsilon_\mu(\underline{k}, x_0) = 0 \quad (3.1/2)$$

besteht, deren allgemeine Lösung

$$\epsilon_\mu(\underline{k}, x_0) = e^{-ik_0 x_0} \epsilon_\mu(\underline{k}) \quad (3.1/3)$$

zu beliebigem zeitunabhängigem $\epsilon_\mu(\underline{k})$ ist. (3.1/2) ist die zu (4.2/6) gehörige homogene Differentialgleichung.

3.2: Verschwindende elektromagnetische Feldstärke.

Auch wenn für Zeiten $t > t_0$ der wechselwirkungsfreie Fall vorliegen soll, definiert durch H_0 , könnte für $t' < t_0$ eine Viererstromdichte bestanden haben, die sich noch zu Zeiten $t > t_0$ durch elektromagnetische Felder ("freie" Felder) bemerkbar macht. Daher kann auch im freien Fall der Erwartungswert der elektromagnetischen Feldstärke durchaus von Null verschieden sein.

Trivialerweise besitzen die Vektoren der (a_μ) - Nullfaser verschwindende $A_\mu(x)$ - Erwartungswerte. Diesen Vektoren entspricht in der Maxwell'schen Elektrodynamik das Viererpotential $A_\mu(x) \equiv 0$. Die Eichmöglichkeiten $A_\mu(x) = E|_\mu(x)$, $E(x) = \text{Skalarfunktion mit } \square E(x) = 0$, ergeben darüber hinaus alle Fälle mit verschwindenden Feldstärken. Wenn wir also im folgenden alle Vektoren mit verschwindenden Erwartungswerten für die elektromagnetischen Feldstärken bestimmen, werden wir eine die (a_μ) - Nullfaser umfassende Vektorenmenge erhalten, die zeigt, was man in der quantisierten Theorie unter Eichung verstehen sollte.

Über die Vektorfunktion

$$\varepsilon_\mu(\underline{x}, x_0) =: \langle \Phi(x_0) | a_\mu(\underline{x}) | \Phi(x_0) \rangle \quad (3.2/1)$$

zu einer Vektorfolge $|\Phi(x_0)\rangle \in \mathcal{H}_0(F')$ werde also vorausgesetzt, daß für den "Erwartungswert" der elektromagnetischen Feldstärken (2.2/3) gelten soll

$$F_{\mu\nu}(x) =: \langle \Phi(x_0) | F_{\mu\nu}(x) | \Phi(x_0) \rangle \equiv 0.$$

Führen wir noch den "Erwartungswert" des Viererpotentials (1.3/5) ein:

$$A_\mu(x) =: \langle \Phi(x_0) | A_\mu(x) | \Phi(x_0) \rangle,$$

so läßt sich leicht die Beziehung

$$F_{\mu\nu}(x) = A_{\mu|\nu}(x) - A_{\nu|\mu}(x) \quad (3.2/2)$$

zwischen diesen Erwartungswerten nachrechnen (sie ist nicht ganz selbstverständlich, weil im hier gebrauchten Schrödingerbild der Operator $F_{\mu\nu}(\underline{x})$ die formale Ableitung von $A_\tau(\underline{x})$ entsprechend (3.2/2) nur im Falle $\mu \neq 0 \neq \nu$ ist). Im Falle $\mu \neq 0 = \nu$ zieht man zum Beweis (1.3/5) und (3.1/3) heran. Auf die Durchführung verzichten wir.

Wählt man dann im (x_μ) - Raum einen beliebigen glatten Weg $\xi_\mu(s)$ etwa vom Anfangspunkt 0 zu irgendeinem Punkt x , so ist der Wert des Integrals

$$\int_0^x d\xi^\mu \langle \phi(\xi_0) | A_\mu(\xi) | \phi(\xi_0) \rangle$$

wegen der Rotationsfreiheit seines Integranden von der Wahl des Weges $\xi_\mu = \xi_\mu(s)$ unabhängig. Der Integralwert stellt daher eine Skalarfunktion $F(x)$ von x allein dar, für die gilt:

$$F_{|\mu}(x) = A_\mu(x) = \langle \phi(x_0) | A_\mu(\underline{x}) | \phi(x_0) \rangle. \quad (3.2/3)$$

Entwickelt man $F(x)$ nach seinen Fourierkomponenten $F(\underline{k}, x_0)$:

$$F_{|0}(x) = - (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3k e^{-ikx} \dot{F}(k, x_0) + cc$$

$$F_{|r}(x) = + (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3k e^{-ikx} ik_r F(k, x_0) + a \quad (r \neq 0)$$

und vergleicht mit

$$A_\mu(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} e^{ikx} \varepsilon_\mu(k, x_0) + cc,$$

so erhält man unter zusätzlicher Voraussetzung der mit (3.1/3) erhaltenen Art der Zeitabhängigkeit für

$\varepsilon_\mu(\underline{k}, x_0)$ die genauere Form:

$$\varepsilon_\mu(\underline{k}, x_0) = e^{-ik_0 x_0} k_\mu \varepsilon(\underline{k}). \quad (3.2/4)$$

Aus (3.2/4) folgt, daß die Vektoren $|\phi(x_0)\rangle$ mit $F_{\mu\nu}(x) \equiv 0$ eine "schwache" Lorentzbedingung der Art

$$\langle \phi(x_0) | L(\underline{k}) | \phi(x_0) \rangle \equiv 0 \quad (3.2/5)$$

erfüllen. Vor allem aber lehrt (3.2/4), auf welche Weise Eichoperatoren zu definieren sind (3.3).

3.3: Die Eichgruppe $\mathcal{E}(t)$.

Im Hinblick auf (3.2/4) gehen wir von einer Skalarfunktion $\varepsilon(\underline{k}): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ aus und bilden mit

$$\varepsilon_\mu(\underline{k}, t) = e^{-ik_0 t} k_\mu \varepsilon(\underline{k}) \quad (3.3/1)$$

unter der Voraussetzung $\varepsilon_\mu(\underline{k}, t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ für alle μ , t den pseudounitären Operator

$$\begin{aligned} E(t) &= \exp \int d^3k \{ -\varepsilon_\mu^*(\underline{k}, t) a^\mu(\underline{k}) + \varepsilon_\mu(\underline{k}, t) \tilde{a}^{\mu\dagger}(\underline{k}, t) \} \\ &= \exp \int d^3k \{ -\varepsilon^*(\underline{k}) e^{ik_0 t} L(\underline{k}) + \varepsilon(\underline{k}) e^{-ik_0 t} L^*(\underline{k}) \}, \end{aligned} \quad (3.3/2)$$

der eine spezielle Form des in 1.4 eingeführten Operators D ist und sich von dem E aus 2.2 nur durch die hereingenommene Zeitabhängigkeit unterscheidet. Die Operatoren $E(t)$ haben für die Räume F' und $F_L(1)$ die folgende Bedeutung:

a) Die Menge der Operatoren $E(t)$ bildet eine Gruppe $\mathcal{E}(t) \subset \mathcal{G}$. Sie ist Automorphismengruppe sowohl des Raumes F' wie aller Räume $F_L(1)$ und Darstellung der additiven Gruppe der komplexwertigen Skalarfunktionen $\mathcal{E}(\underline{k})$.

b) Sei $|\phi(t)\rangle \in \mathcal{V}_{H_0}^{\sim}(F')$ und $E(t) \in \mathcal{E}(t)$. Dann folgt $E(t)|\phi(t)\rangle \in \mathcal{V}_{H_0}^{\sim}(F')$, so daß mit $|\phi(t)\rangle$ auch $E(t)|\phi(t)\rangle$ eine durch H_0 gegebene Schrödingerkurve durchläuft.

c) Sei $E(x_0) \in \mathcal{E}(x_0)$ und $|\phi\rangle \in F'$. Dann gilt für den Erwartungswert des Viererpotentials $A_\mu(\underline{x})$:

$$\langle \phi | E^*(x_0) A_\mu(\underline{x}) E(x_0) | \phi \rangle = \langle \phi | A_\mu(\underline{x}) | \phi \rangle + E_{1\mu}(x), \quad (3.3/3)$$

wobei $E(x)$ eine reellwertige Skalarfunktion mit

$\square E(x) \equiv 0$ ist.

Wir nennen daher $\mathcal{E}(t)$ die Eichgruppe zum Gupta - Bleuler - Raum. Wegen (3.3/3) haben die Vektoren $|a\rangle$ und $|b\rangle =: E(x_0)|a\rangle$ zu $E \in \mathcal{E}$ gleiche Erwartungswerte hinsichtlich der elektromagnetischen Feldstärken. Dieser Sachverhalt kann in folgender Weise umgekehrt werden:

d) Seien $|a\rangle$ und $|b\rangle$ Vektoren nichtverschwindender Norm aus derselben Normfaser von F' mit gleichen Erwartungswerten für die elektromagnetischen Feldstärken. Dann gibt es genau ein $E(x_0) \in \mathcal{E}(x_0)$, so daß $|b\rangle = E(x_0)|a\rangle$.

e) Sei $|\phi\rangle \in F_L(0)$ und $E \in \mathcal{E}$. Dann gilt

$$\langle \phi | \hat{\alpha}_\mu^*(\underline{k}) \hat{a}_\mu^*(\underline{k}) | \phi \rangle = \langle \phi | E^* \hat{\alpha}_\mu^*(\underline{k}) \hat{a}_\mu^*(\underline{k}) E | \phi \rangle. \quad (3.3/4)$$

Photonendichte, folglich auch Photonengesamtzahl und -gesamtenergie sind somit im Lorentzraum $F_L(0)$ eichinvariant.

Die Dichte der transversalen Photonen $\sum_{\lambda=1}^2 \hat{a}^{(\lambda)*}(\underline{k}) \hat{a}^{(\lambda)}(\underline{k})$

hingegen ist in jedem der Räume $F_L(1)$, l beliebig, eichinvariant.

Beweise:

Zu a):

Mit $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ ist auch $E_1 \cdot E_2 \in \mathcal{E}$, denn wegen der Vertauschbarkeit $[L(\underline{k}), L^*(\underline{l})] = 0$ können vermöge 0.2.d die Exponenten bei Produktbildung einfach addiert werden. Jedes E bildet weiter wegen seiner Pseudounitari-tät F' und jeden der Räume $F_L(1)$ auf sich ab:

Ist $|\phi\rangle \in F_L(1)$, also $L(\underline{k})|\phi\rangle = 1|\phi\rangle$, so folgt $L(\underline{k})E|\phi\rangle = EL(\underline{k})|\phi\rangle = E1|\phi\rangle = 1E|\phi\rangle$, so daß auch $E|\phi\rangle$ dem Raum $F_L(1)$ angehört.

Zu b):

Der Zeitfaktor in $\varepsilon_\mu(\underline{k}, t)$ ist gerade so gewählt, daß mit $|\phi(t)\rangle$ auch $E(t)|\phi(t)\rangle$ die Schrödingergleichung zu H_0 erfüllt.

Zu c):

$$\langle \phi | E^*(x_0) A_\mu(\underline{x}) E(x_0) | \phi \rangle =$$

$$\langle \phi | A_\mu(\underline{x}) | \phi \rangle - i(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \langle \phi | \phi \rangle \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|}} \{ e^{ikx} \cdot i k_\mu \varepsilon(\underline{k}) + cc \} =$$

$$\langle \phi | A_\mu(\underline{x}) | \phi \rangle + E_{1\mu}(x), \text{ wenn man setzt:}$$

$$E(x) = -i(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \langle \phi | \phi \rangle \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|}} \{ e^{ikx} \varepsilon(\underline{k}) + cc \}.$$

Aus $k^2 = 0$ folgt dann $\square E(x) \equiv 0$.

Zu d):

Weil $|a\rangle$ und $|b\rangle$ sich in derselben Normfaser befinden, gibt es einen Vektor $|*\rangle$ in der (a_μ) - Nullfaser und Operatoren $D_a, D_b \in \mathcal{J}$, so daß $|a\rangle = D_a |*\rangle$ und $|b\rangle = D_b |*\rangle$. Daraus folgt $|b\rangle = D_b D_a^* |a\rangle =: D |a\rangle$

mit $D =: D_b \cdot D_a^* \in \mathcal{J}$. D hat also nach 1.4 die Form

(1.4/1) mit gewissen φ und $\delta_\mu(\underline{k})$, so daß nach (1.4/2) folgt:

$$\langle b | a_\mu(\underline{k}) | b \rangle = \langle a | D^* a_\mu(\underline{k}) D | a \rangle = \langle a | a_\mu(\underline{k}) | a \rangle + \delta_\mu(\underline{k}) \langle a | a \rangle.$$

Weil sich aber die Erwartungswerte des Potentials $A_\mu(\underline{x})$ in $|a\rangle$ und $|b\rangle$ höchstens um einen Eichterm unterscheiden dürfen, folgt analog c), daß $\delta_\mu(\underline{k})$ die Form

$\delta_\mu(\underline{k}) = k_\mu \varepsilon(\underline{k})$ hat, so daß $D \in \mathcal{E}$. Genauer in 3.4, 2.

Zu e):

Nach (1.4/2) ist

$$E^* a_\mu^* a_\mu^* E = E^* a_\mu^* E E^* a_\mu^* E = \hat{a}_\mu^* a_\mu^* + \varepsilon_\mu^* a_\mu^* + \varepsilon_\mu \hat{a}_\mu^*,$$

denn $\varepsilon_\mu^* \varepsilon_\mu = 0$. Weil $|\phi\rangle$ aus $F_L(0)$ stammen, das heißt durch $L(\underline{k})$ annulliert werden soll, folgt die Behauptung.

Die Dichte der transversalen Photonen ist mit $L(\underline{k})$ vertauschbar, so daß E^* mit E in (3.3/4) vereinigt werden kann.

3.4: Bemerkungen zur Lorentzäquivalenz.

Zur Lorentzäquivalenz sind im Zusammenhang mit der Einführung der Schrödingerkurven $\mathcal{V}_{H_0}(F')$ einige Bemerkungen veranlaßt, die im folgenden nachgetragen werden:

1. Zusammenhang von (2.1/1) mit der klassischen Lorentzbedingung.

Durchläuft $|\phi(x_0)\rangle$ eine durch H_0 gegebene Schrödingerkurve innerhalb $F_L(0)$, so gilt definitionsgemäß $L(\underline{k})|\phi(x_0)\rangle \equiv 0$ und, falls $\langle \phi(x_0) | \phi(x_0) \rangle \neq 0$ ist, nach 1.4 und (2.1/2)

$$k^\mu \langle \phi(x_0) | a_\mu(\underline{k}) | \phi(x_0) \rangle = k^\mu e^{-i k_0 x_0} \varepsilon_\mu(\underline{k}) = 0. \quad (3.4/1)$$

Aus der Lorentzbedingung $L(\underline{k})|\phi(x_0)\rangle \equiv 0$ folgt daher

$$\partial^\mu A_\mu(x) = \partial^\mu \langle \phi(x_0) | A_\mu(x) | \phi(x_0) \rangle =$$

$$\partial^\mu \left\{ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3 \underline{k}}{\sqrt{2|\underline{k}|}} [e^{-i k x} \varepsilon_\mu(\underline{k}) + c.c.] \right\} = 0,$$

also die klassische Lorentzbedingung

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0. \quad (3.4/2)$$

Inwieweit die Forderung $L(\underline{k})|\phi\rangle = 0$ nun wirklich über (3.4/2) hinausgeht, soll hier nicht untersucht werden.

2. Nachtrag zum Beweis von (2.2/6).

Zum Beweis dieser Gleichung war noch die Frage unbeantwortet geblieben, ob es eine Lorentzobservable ω gibt, welche die angegebene Form (2.2/6) des Operators E erzwingt. Wir zeigen im folgenden, daß $F_{\mu\nu}(\underline{x})$ eine solche Lorentzobservable ist und stützen uns dabei auf das Hauptresultat von Abschnitt 3.2:

Sei also $|b\rangle = D|a\rangle$, $|a\rangle \sim |b\rangle$, $|a\rangle = D_a|*\rangle$, $|b\rangle = D_b|*\rangle$, wobei $D_a, D_b, D =: D_b D_a^* \in \mathcal{V}$ und $|*\rangle$ der

§ 4) Die j_μ - Wechselwirkung.

Wir gehen im folgenden vom Gupta - Bleuler - Raum ($F', < | >$) bzw. von den Lorentzräumen $F_L(1)$ aus, bestimmen die möglichen Schrödingerkurven zu einer gegebenen Viererstromdichte und diskutieren Probleme in diesem Umkreis, z. B. die Frage nach hinreichenden Bedingungen dafür, daß Schrödingerkurven ganz in einem Lorentzraum $F_L(1)$ liegen und die Frage nach der physikalischen Interpretierbarkeit der Photonendichte.

4.1: Der Hamiltonoperator.

Eine Viererstromdichte

$$j_\mu(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3k \sqrt{2|k|} \cdot e^{-ikx} j_\mu(k, x_0) \quad (4.1/1)$$

sei so vorgegeben, daß Stromerhaltung $j_\mu^{|\mu}(x) = 0$ gilt. Mit dem pseudosymmetrischen Operator (1.3/5) des Viererpotentials $A_\mu(x)$ ist dann der Wechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators

$$H_W(x_0) = \int d^3x j_\mu(x) A^\mu(x) = \int d^3k \{ j_\mu^*(k, x_0) a^\mu(k) + j^\mu(k, x_0) a_\mu^*(k) \} \quad (4.1/2)$$

da wegen der Reellwertigkeit von $j_\mu(x)$ noch

$$j_\mu^*(k, x_0) = j_\mu(-k, x_0) \quad (4.1/3)$$

vorauszusetzen ist. Der gesamte Hamiltonoperator ist $H = H_0 + H_W$ mit H_0 aus (3/2). H ist pseudosymmetrisch und über $j_\mu(k, x_0)$ explizit zeitabhängig.

Wann ist H Lorentzobservable? Nach 2.2 ist hierzu festzusetzen: $\mathbb{D}_H \subseteq \{ |\phi\rangle \in F' \mid [L(k), H] |\phi\rangle = 0 \}$. Wegen

$$[L(k), H] = k_0 L(k) + k_\nu j^\nu(k, x_0) \quad (4.1/4)$$

muß eine Bindung zwischen l und j_μ bestehen. Wir behandeln das Problem weiter in 4.5.

4.2: Die Schrödingerkurven.

Wir suchen die Schar $\mathcal{T}_H(F') = \mathcal{T}_{H_0 + H_W}(F')$ der Schrödingerkurven im Gupta - Bleuler - Raum $(F', \langle | \rangle)$ zum Hamiltonoperator H von 4.1. Nachdem sich in 1.4 gezeigt hatte, daß $|\phi\rangle \in F'$ mit $\langle \phi | \phi \rangle \neq 0$ stets in der Form $|\phi\rangle = D|\phi_0\rangle$, $D \in \mathcal{V}$, $|\phi_0\rangle$ aus der (a_μ) -Nullfaser, geschrieben werden kann, liegt die Vermutung nahe, daß es zu $|\phi(x_0)\rangle \in \mathcal{T}_H(F')$ eine Darstellung $|\phi(x_0)\rangle = G(x_0)|\tilde{\phi}(x_0)\rangle$ derart gibt, daß für jedes x_0 der Operator $G(x_0) \in \mathcal{V}$ ist und $|\tilde{\phi}(x_0)\rangle$ der (a_μ) -Nullfaser angehört und dort eine freie Schrödingerkurve durchläuft. Bevor wir eine solche Darstellung anstreben, wollen wir eine Zerlegung

$$|\phi(x_0)\rangle = D(x_0)|\tilde{\phi}(x_0)\rangle$$

angeben, bei der $|\tilde{\phi}(x_0)\rangle$ eine durch H_0 gegebene Schrödingerkurve durchlaufen und für jedes x_0 der Operator $D(x_0) \in \mathcal{V}$ sein soll. Gesucht ist also zu vorgegebenem H ein pseudo-unitärer Operator

$$D(x_0) = e^{-i\varphi(x_0)} \exp \int d^3k \left\{ -g_\mu^*(\underline{k}, x_0) a_\mu^\dagger(\underline{k}) + g_\mu^\dagger(\underline{k}, x_0) a_\mu^*(\underline{k}) \right\} \quad (4.2/1)$$

mit reellem $\varphi(x_0)$ und $g_\mu \in L^2(\mathbb{R}^3)$ derart, daß aus $|\tilde{\phi}(x_0)\rangle \in \mathcal{T}_{H_0}(F')$ stets folgt: $D(x_0)|\tilde{\phi}(x_0)\rangle \in \mathcal{T}_H(F')$.

Demnach sind die Funktionen $\varphi(x_0)$ und $g_\mu(\underline{k}, x_0)$ so zu bestimmen, daß gilt:

$$HD(x_0)|\tilde{\phi}(x_0)\rangle = i \frac{d}{dx_0} D(x_0)|\tilde{\phi}(x_0)\rangle \text{ und } H_0|\tilde{\phi}(x_0)\rangle = i \frac{d}{dx_0} |\tilde{\phi}(x_0)\rangle. \quad (4.2/2)$$

Wir führen die Rechnung im einzelnen durch:

$$\begin{aligned} H_0 D(x_0) |\tilde{\phi}(x_0)\rangle &= \int d^3k k_0 a_\mu^*(\underline{k}) a_\mu^\dagger(\underline{k}) D(x_0) |\tilde{\phi}(x_0)\rangle = \\ &\int d^3k k_0 D(x_0) D^*(x_0) a_\mu^*(\underline{k}) D(x_0) D^*(x_0) a_\mu^\dagger(\underline{k}) D(x_0) |\tilde{\phi}(x_0)\rangle = \\ &\int d^3k k_0 D(x_0) \left\{ a_\mu^*(\underline{k}) + g_\mu^*(\underline{k}, x_0) \right\} \left\{ a_\mu^\dagger(\underline{k}, x_0) + g_\mu^\dagger(\underline{k}, x_0) \right\} |\tilde{\phi}(x_0)\rangle = \\ &D(x_0) H_0 |\tilde{\phi}(x_0)\rangle + D(x_0) \int d^3k k_0 \left\{ g_\mu^* a_\mu^\dagger + g_\mu^\dagger a_\mu^* \right\} |\tilde{\phi}(x_0)\rangle + \int d^3k k_0 g_\mu^* g_\mu^\dagger D |\tilde{\phi}\rangle. \end{aligned}$$

Zusammen mit

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(x_0) a^\mu(\underline{k}) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle &= \mathcal{D}(x_0) a^\mu(\underline{k}) \mathcal{D}^\dagger(x_0) \mathcal{D}(x_0) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle = \\ \{a^\mu(\underline{k}) - g^\mu(\underline{k}, x_0)\} \mathcal{D}(x_0) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle &\quad \text{und entsprechend} \\ \mathcal{D}(x_0) \tilde{a}_\mu^\dagger(\underline{k}) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle &= \{\tilde{a}_\mu^\dagger(\underline{k}) - \tilde{g}_\mu^\dagger(\underline{k}, x_0)\} \mathcal{D}(x_0) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle \end{aligned}$$

erhält man weiter zunächst

$$\begin{aligned} H_0 \mathcal{D}(x_0) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle &= \mathcal{D}(x_0) H_0 |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle - \int d^3k k_0 g_\mu^* g^\mu \mathcal{D}(x_0) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle + \\ &\int d^3k k_0 \{g_\mu^*(\underline{k}, x_0) a^\mu(\underline{k}) + g_\mu^\dagger(\underline{k}, x_0) \tilde{a}_\mu^\dagger(\underline{k})\} \mathcal{D}(x_0) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle. \end{aligned}$$

Hinzunahme von $H_W(x_0) \mathcal{D}(x_0) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle$ ergibt dann

$$\begin{aligned} H \mathcal{D}(x_0) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle &= \mathcal{D}(x_0) H_0 |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle - \int d^3k k_0 g_\mu^* g^\mu \mathcal{D}(x_0) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle + \\ &\int d^3k \{ [k_0 g_\mu^*(\underline{k}, x_0) + \tilde{g}_\mu^*(\underline{k}, x_0)] a^\mu(\underline{k}) + \\ &[k_0 g_\mu(\underline{k}, x_0) + \tilde{g}_\mu(\underline{k}, x_0)] \tilde{a}_\mu^\dagger(\underline{k}) \} \mathcal{D}(x_0) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle. \end{aligned} \quad (4.2/3)$$

Der Berechnung von $i \frac{d}{dx_0} \mathcal{D}(x_0)$ schicken wir folgenden Hilfssatz voraus:

$$\text{Sei } G(x_0) = \exp \int d^3k \{-\tilde{g}_\mu^*(\underline{k}, x_0) a^\mu(\underline{k}) + g_\mu^\dagger(\underline{k}, x_0) \tilde{a}_\mu^\dagger(\underline{k})\}.$$

Dann gilt für die Ableitung $\dot{G}(x_0) =: \frac{d}{dx_0} G(x_0)$:

$$\dot{G}(x_0) = \int d^3k \{-\dot{\tilde{g}}_\mu^* a^\mu + \dot{g}_\mu^\dagger \tilde{a}_\mu^\dagger + \frac{1}{2} \dot{\tilde{g}}_\mu^* g^\mu - \frac{1}{2} g_\mu^* \dot{\tilde{g}}^\mu\} G(x_0). \quad (4.2/4)$$

Zum Beweis von (4.2/4) schreibt man $G(x_0)$ mittels der Rechenregel für $\exp(A + B)$ aus 0.2.d als Produkt aus drei Operatoren, differenziert nach der Produktregel und faßt die Ergebnisse unter Beachtung von 0.2.d wieder zu einem einzigen Exponentialausdruck zusammen. Nach (4.2/4) ist dann

$$i \frac{d}{dx_0} D(x_0) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle = \dot{\Phi}(x_0) D(x_0) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle + D(x_0) i \frac{d}{dx_0} |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle +$$

$$i \int d^3k \left\{ -\dot{q}_\mu^*(\underline{k}, x_0) a_\mu^*(\underline{k}) + \dot{q}_\mu^*(\underline{k}, x_0) \alpha_\mu^*(\underline{k}) \right\} D(x_0) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle +$$

$$\frac{i}{2} \int d^3k \left\{ \dot{q}_\mu^*(\underline{k}, x_0) q_\mu^*(\underline{k}, x_0) - \dot{q}_\mu^*(\underline{k}, x_0) \dot{q}_\mu^*(\underline{k}, x_0) \right\} D(x_0) |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle.$$

Unter der Voraussetzung $H_0 |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle = i \frac{d}{dx_0} |\tilde{\Phi}(x_0)\rangle$ ist für das Bestehen der Schrödingergleichung (4.2/2) somit hinreichend, daß gilt:

$$\dot{\Phi}(x_0) = - \int d^3k k_0 q_\mu^*(\underline{k}) q_\mu^*(\underline{k}) - \frac{i}{2} \int d^3k [\dot{q}_\mu^*(\underline{k}) q_\mu^*(\underline{k}) - q_\mu^*(\underline{k}) \dot{q}_\mu^*(\underline{k})], \quad (4.2/5)$$

wonach $\dot{\Phi}$ - wie für (4.2/1) gefordert - reell ist und daß die Differentialgleichung erfüllt ist:

$$i \frac{\partial}{\partial x_0} q_\mu(\underline{k}, x_0) - k_0 q_\mu(\underline{k}, x_0) = \dot{j}_\mu(\underline{k}, x_0). \quad (4.2/6)$$

Die zu (4.2/6) gehörige homogene Differentialgleichung war bereits in (3.1/2) aufgetreten; ihre Lösung ist $\delta_\mu(\underline{k}, x_0) = e^{-ik_0 x_0} \delta_\mu(\underline{k})$ bei (zunächst) beliebigem $\delta_\mu(\underline{k})$. Hiermit ist die allgemeinste Lösung von (4.2/6):

$$\varepsilon_\mu(\underline{k}, x_0) = e^{-ik_0 x_0} \left\{ \delta_\mu(\underline{k}) - i \int_{\tau}^{x_0} dt e^{ik_0 t} \dot{j}_\mu(\underline{k}, t) \right\} \quad (4.2/7)$$

worin τ ein beliebiger Anfangszeitpunkt der t - Integration ist. Weil $\varepsilon_\mu \in L^2(\mathbb{R}^3)$ stammen soll, ist es noch notwendig, zusätzlich $\delta_\mu \in L^2(\mathbb{R}^3)$ vorauszusetzen.

Ist insbesondere $j_\mu(\underline{k}, t)$ zeitkonstant mit dem Wert $j_\mu(\underline{k})$, so erhält man aus (4.2/7)

$$\varepsilon_\mu(\underline{k}, x_0) = \delta_\mu(\underline{k}, x_0) - \frac{1}{k_0} \dot{j}_\mu(\underline{k}) [1 - e^{-ik_0(x_0 - \tau)}]$$

$$= \delta_\mu'(\underline{k}, x_0) - \frac{1}{k_0} \dot{j}_\mu(\underline{k}), \quad (4.2/8)$$

worin auch δ_μ' eine Lösung der Form (3.1/3) von (3.1/2) ist.

$g_{\mu}(\underline{k}, x_0)$ ist in (4.2/7) mittels $j_{\mu}(\underline{k}, t)$ geschrieben. Für den Ansatz (4.2/1) mußte $g_{\mu} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ für alle μ gefordert werden. Daher ist zu prüfen, welche Einschränkung bezüglich der j_{μ} diese Bedingung nach sich zieht. Wir diskutieren diese Frage in 4.3.

Nach den bisherigen Überlegungen hat $|\tilde{\Phi}(x_0)\rangle$ die Eigenschaft (4.2/2). Gesucht war aber eine Darstellung

$$|\Phi(x_0)\rangle = G(x_0)|\Phi_0(x_0)\rangle,$$

wobei $|\Phi_0(x_0)\rangle$ innerhalb der (a_{μ}) - Nullfaser eine freie Schrödingerkurve durchläuft. Zu $|\tilde{\Phi}(x_0)\rangle$ gibt es aber bei jedem x_0 einen Operator $\tilde{D}(x_0)$, so daß $|\tilde{\Phi}(x_0)\rangle = \tilde{D}(x_0)|\Phi_0(x_0)\rangle$. Die den gesuchten Operator $\tilde{D}(x_0)$ bestimmende Vierervektorfunktion $\tilde{g}_{\mu}(\underline{k}, x_0)$ ist nach dem Beweis zu (1.4/3,4) als

$$\tilde{g}_{\mu}(\underline{k}, x_0) =: \frac{\langle \tilde{\Phi}(x_0) | a_{\mu}(\underline{k}) | \tilde{\Phi}(x_0) \rangle}{\langle \tilde{\Phi}(x_0) | \tilde{\Phi}(x_0) \rangle}$$

festzulegen. Nach 3.1 hat $\tilde{g}_{\mu}$ die Form $\tilde{g}_{\mu} = \tilde{e}^{i\underline{k}_0 x_0} \tilde{g}_{\mu}(\underline{k})$, denn $|\tilde{\Phi}(x_0)\rangle \in \mathcal{T}_{H_0}(F^1)$. Somit hat $\tilde{g}_{\mu}$ gerade die Gestalt des in (4.2/7) auftretenden Terms $\tilde{e}^{i\underline{k}_0 x_0} \tilde{g}_{\mu}(\underline{k})$.

Schreibt man nun

$$|\Phi(x_0)\rangle = D(x_0)|\tilde{\Phi}(x_0)\rangle = D(x_0)\tilde{D}(x_0)|\Phi_0(x_0)\rangle$$

und faßt $D(x_0)\tilde{D}(x_0) =: G(x_0) \in \hat{\mathcal{V}}$ zu einem Operator $G(x_0)$ zusammen, so ist die gesuchte Darstellung erreicht. Die den Operator $G(x_0)$ definierende Vierervektorfunktion $g_{\mu}(\underline{k}, x_0)$ besitzt die Form (4.2/7), denn (vom Phasenfaktor abgesehen) die Exponenten von D und $\tilde{D}$ werden lediglich addiert. Nunmehr ist $g_{\mu}(\underline{k}, x_0)$ als

$$g_{\mu}(\underline{k}, x_0) = \frac{\langle \Phi(x_0) | a_{\mu}(\underline{k}) | \Phi(x_0) \rangle}{\langle \Phi(x_0) | \Phi(x_0) \rangle}$$

eindeutig bestimmt, so daß bei vorgegebenem Integrationsbeginn τ in (4.2/7) auch $\tilde{g}_{\mu}$ dort eindeutig durch $|\Phi(x_0)\rangle$ gegeben ist. Der in der (a_{μ}) - Nullfaser liegende $|\Phi_0(x_0)\rangle$ durchläuft dort eine Schrödingerkurve aus $\mathcal{T}_{H_0}(F^1)$; wir verzichten darauf, dies hier noch einmal rechnerisch zu verifizieren.

Es ist wohl nicht überflüssig, zum Ausdruck (4.2/7) zurückzukehren mit der Absicht, eine physikalische Interpretation des Integrationsbeginns τ und der Vierervektorfunktion $\delta_\mu(K)$ zu gewinnen:

Nach 2.4 kann durch jeden Vektor $|\phi\rangle$ des Gupta - Bleuler - Raumes, der dem Definitionsbereich von H angehört, eine Schrödingerkurve gelegt werden. $|\phi\rangle$ selbst ist unter der Voraussetzung $\langle\phi|\phi\rangle \neq 0$ nach dem Beweis zu (1.4/3,4) in der Form $|\phi\rangle = D'|\phi_0\rangle$, $D' \in \mathcal{V}$, $|\phi_0\rangle$ aus der (a_μ) - Nullfaser, schreibbar. Dazu ist die D' definierende Vierervektorfunktion δ'_μ als

$$\delta'_\mu(\underline{k}) = \frac{\langle\phi|a_\mu(\underline{k})|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle}$$

festzulegen. Bestimmen wir dementsprechend bei vorgegebenem τ das δ'_μ von (4.2/7) derart, daß

$$e^{-ik_0\tau} \delta'_\mu(\underline{k}) =: \frac{\langle\phi|a_\mu(\underline{k})|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} \quad (4.2/9)$$

so ist zu $|\phi\rangle$ und τ das δ_μ eindeutig definiert. Damit ist $G(x_0)$ eindeutig so festgelegt, daß Schrödingerkurven $|\phi_0(x_0)\rangle \in \mathcal{V}_{H_0}(F')$ und $|\phi(x_0)\rangle \in \mathcal{V}_H(F')$ existieren mit der Eigenschaft

$$|\phi(\tau)\rangle = |\phi\rangle \quad (\text{vorgegeben}) \text{ und}$$

$$|\phi_0(\tau)\rangle = |\phi_0\rangle \quad (\text{gemäß } |\phi\rangle = D'|\phi_0\rangle \text{ bestimmt}).$$

Damit ist eine Schrödingerkurve durch $|\phi\rangle$ gelegt; ein die Kurve durchwandernder Vektor erreicht beim Wert $x_0 = \tau$ das vorgegebene $|\phi\rangle$. Die Kurve $|\phi(x_0)\rangle$ erscheint als Bild einer freien Kurve $|\phi_0(x_0)\rangle$ der (a_μ) - Nullfaser.

Somit garantiert die freie Wählbarkeit von $\delta_\mu(K) \in L^2$ in (4.2/7), daß auch wirklich durch jeden $|\phi\rangle \in \mathbb{D}_H$ eine Schrödingerkurve aus $\mathcal{V}_H(F')$ gezogen werden kann. Die bisherigen Ergebnisse fassen wir wie folgt zusammen:

- a) Durch jeden $|\phi\rangle \in \mathbb{D}_H$ gibt es genau eine Schrödingerkurve $|\phi(x_0)\rangle$ aus $\mathcal{V}_H(F')$. Sofern $\langle\phi|\phi\rangle \neq 0$ gilt,

ist für alle x_0 auch $\langle \phi(x_0) | \phi(x_0) \rangle \neq 0$ und es gibt genau eine freie Schrödingerkurve $|\phi_0(x_0)\rangle$ aus der (a_μ) -Nullfaser und genau einen pseudounitären Operator

$$G(x_0) = e^{-i\varphi(x_0)} \exp \left\{ d^2 k \left[-g_\mu^*(\underline{k}, x_0) a_\mu^\dagger(\underline{k}) + g_\mu^\dagger(\underline{k}, x_0) a_\mu^*(\underline{k}) \right] \right\}$$

mit $g_\mu(\underline{k}, x_0)$ nach (4.2/7), so daß

$$|\phi(x_0)\rangle = G(x_0) |\phi_0(x_0)\rangle. \quad (4.2/10)$$

Für $|\phi(x_0)\rangle$ nach (4.2/10) gelten weiterhin die folgenden Aussagen hinsichtlich der Erwartungswerte von Viererpotential und Photonendichte. Wir setzen wieder $\langle \phi | \phi \rangle \neq 0$ voraus.

b) Für $A_\mu(x) =: \frac{\langle \phi(x_0) | A_\mu(x) | \phi(x_0) \rangle}{\langle \phi(x_0) | \phi(x_0) \rangle}$

besteht die Gleichung

$$\square A_\mu(x) = j_\mu(x). \quad (4.2/11)$$

c) Entsprechend gilt für $n(\underline{k}) = a_\nu^*(\underline{k}) a^\nu(\underline{k})$:

$$\frac{\langle \phi(x_0) | n(\underline{k}) | \phi(x_0) \rangle}{\langle \phi(x_0) | \phi(x_0) \rangle} = \frac{\langle \phi_0(x_0) | n(\underline{k}) | \phi_0(x_0) \rangle}{\langle \phi_0(x_0) | \phi_0(x_0) \rangle} + g_\mu^* g^\mu. \quad (4.2/12)$$

Für Glauberzustände reduziert sich die rechte Seite von (4.2/12) auf $g_\mu^* g^\mu$.

Gehört für ein x_0 der Vektor $|\phi(x_0)\rangle$ einem der Räume $F_L(1)$ an, so gilt $|\phi_0(x_0)\rangle \in F_L(0)$. Nach (2.1/4) ist in diesem Fall der erste Summand der rechten Seite von (4.2/12) nichtnegativ. Über das Vorzeichen des Erwartungswertes von $n(\underline{k})$ ist damit allerdings noch keine Aussage möglich, denn über das Vorzeichen von $g_\mu^* g^\mu$ besitzen wir noch keine Information. Der Frage, unter welchen Voraussetzungen $g_\mu^* g^\mu \geq 0$ für alle x_0 ist, gehen wir in 4.7 nach. Erst dann kann beurteilt werden, in welchen Fällen der Erwartungswert der Photonendichte im Zustand $|\phi(x_0)\rangle \in \bigcup_{\underline{\ell}} F_L(1)$ (so daß stets $|\phi_0(x_0)\rangle \in F_L(0)$)

sein muß) nichtnegativ ist.

Beweise:

Zu b):

Mit $\varepsilon_\mu(\underline{k}, x_0) = \frac{\langle \phi(x_0) | a_\mu(\underline{k}) | \phi(x_0) \rangle}{\langle \phi(x_0) | \phi(x_0) \rangle}$ ist zunächst

$$A_\mu(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|}} \{ e^{i\underline{k}x} g_\mu + cc. \} \quad , \text{ so daß}$$

$$\square A_\mu(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|}} \{ e^{i\underline{k}x} [-\ddot{g}_\mu(\underline{k}, x_0) - k_0^2 g_\mu(\underline{k}, x_0)] + cc. \}.$$

Aus (4.2/6) entnimmt man

$$\ddot{\varepsilon}_\mu = -i\dot{\varepsilon}_\mu k_0 - i\dot{j}_\mu = -k_0^2 \varepsilon_\mu - k_0 j_\mu - i\dot{j}_\mu, \text{ so daß folgt:}$$

$$\square A_\mu(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2|k|}} \{ e^{i\underline{k}x} [-k_0 j_\mu + i\dot{j}_\mu] + cc. \}.$$

Dies ist $(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3k \sqrt{2|k|} e^{i\underline{k}x} j_\mu(\underline{k}, x_0)$, denn das zweite

Integral mit $\dot{j}_\mu$ verschwindet wegen (4.1/3) zusammen mit seinem Konjugiert - Komplexen. Wegen (4.1/1) ist daher

$$\square A_\mu(x) = j_\mu(x).$$

Zu c): Folgt mit (1.4/2).

4.3: Zur Quadratintegrierbarkeit der g_μ .

In 4.2 mußte aus mathematischen Gründen (vgl. 1.4) vorausgesetzt werden, daß $g_\mu(\underline{k}, x_0) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ für alle μ und jeden Zeitpunkt x_0 gilt. Im folgenden Abschnitt soll daher wenigstens für den stationären Fall untersucht werden, welche Einschränkungen physikalischer Art diese Bedingung für die vorgegebene Viererstromdichte $j_\mu(\underline{x})$ bedeutet.

- a) Die Forderung $g_\mu(\underline{k}, x_0) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ führt zu endlicher Gesamtphotonenzahl des zu g_μ gehörenden Glauberzustandes.

Zum Beweis bildet man mit g_μ nach (4.2/1) den Exponentialoperator $G(x_0)$ und erhält für den Glauberzustand $|G(x_0)\rangle = G(x_0)|0\rangle$ nach (1.4/11) sofort

$$\langle G(x_0) | N | G(x_0) \rangle = \int d^3k g_V^*(\underline{k}, x_0) g_V(\underline{k}, x_0),$$

also ein endliches Ergebnis. Damit schließt die Forderung $g_\mu \in L^2(\mathbb{R}^3)$ insbesondere eine "Infrarotkatastrophe" aus. Mathematische Besonderheiten hinsichtlich des inseparablen Hilbertraumes, der im Zusammenhang mit ihr auftritt, werden bei vorgegebener räumlicher Stromdichte $\underline{j}(\underline{x})$ neuerdings in [13] und [16] diskutiert.

- b) Im stationären Fall gilt $g_\mu(\underline{k}, x_0) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ genau dann, wenn $j_\mu(\underline{k})/k_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Notwendige Bedingung für das Letztere ist, daß die Gesamtladung Q verschwindet.

Beweis: Nach (4.2/9) ist im stationären Fall $g_\mu = \delta_\mu - \frac{2}{k_0} j_\mu$. Hierin ist δ_μ für jedes x_0 ohnehin als quadratintegrierbar vorausgesetzt. Wegen der Raumeigenschaft von $L^2(\mathbb{R}^3)$ ist also die Quadratintegrierbarkeit von g_μ mit der von $j_\mu(\underline{k})/k_0$ gleichbedeutend.

Mit (4.1/1) gilt für die Gesamtladung:

$$Q = \int d^3x j_0(\underline{x}) \sim \int d^3k d^3x \sqrt{2k_0} j_0(\underline{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} + cc \sim \int d^3k \sqrt{2k_0} j_0(\underline{k}) \delta(\underline{k}) + cc.$$

Dies ist Null, denn $\sqrt{k_0} j_0(\underline{k}) = k_0^{\frac{3}{2}} \frac{j_0(\underline{k})}{k_0} \rightarrow 0$ für $\underline{k} \rightarrow \underline{0}$.

Gerade die hiermit ausgedrückte einschneidende Bedingung bezüglich der Gesamtladung (die auch in [6] mitgeteilt ist) werden wir anschließend als Hinweis nehmen, wie bei klassisch vorgegebener stationärer Viererstromdichte trotz $Q \neq 0$ noch ein, die physikalische Situation beschreibender Vierervektor $g_\mu \in L^2(\mathbb{R}^3)$ konstruiert werden kann.

Zuvor beziehen wir, was j_μ angeht, einen absolut klassischen Standpunkt: $j_\mu(\underline{x})$ soll klassisch zulässig heißen, wenn die klassische Selbstwechselwirkungsenergie

$$\int \frac{d^3k}{k_0} j_\mu^*(\underline{k}) j_\mu(\underline{k}) \quad (4.3/1)$$

für alle μ (ohne Summation) endlich ist. δ - artige Ladungsverteilungen sind danach nicht klassisch zulässig und für das Weitere auszuschließen.

Die Einschränkung für j_μ , klassisch zulässig zu sein, reicht natürlich noch nicht aus, um ein quadratintegrables g_μ zu garantieren: Eine geladene Kugel mit Radius $\neq 0$ im Vakuum besitzt endliche Feldenergie, so daß das entsprechende $j_0(\underline{x})$ klassisch zulässig ist. Das zugehörige $g_0(\underline{k})$ kann wegen $Q \neq 0$ aber nicht quadratintegrierbar sein.

Jedoch ist ein klassisch zulässiges $j_\mu(\underline{x})$ noch in einigem Umfang veränderbar, ohne daß sich hierdurch eine Änderung der klassisch - physikalischen Situation ergibt: In hinreichender Entfernung von dem (als beschränkt angenommenen) Raumgebiet, in dem $j_\mu(\underline{x}) \neq 0$ ist, können wir ein klassisch zulässiges $\tilde{j}_\mu(\underline{x})$ beliebig einführen. Die "hinreichende" Entfernung ist durch die Bedingung abgegrenzt, daß die "Wechselwirkungsenergie" zwischen $j_\mu(\underline{x})$ und $\tilde{j}_\mu(\underline{x})$ verschwinden soll. Dementsprechend definieren wir:

Zwei klassisch zulässige Viererstromdichten $j_\mu(\underline{x})$ und $j'_\mu(\underline{x})$ heißen klassisch äquivalent, wenn für die Fourierkomponenten von $j_\mu(\underline{x})$, $j'_\mu(\underline{x})$ und $\tilde{j}_\mu(\underline{x}) =: j'_\mu(\underline{x}) - j_\mu(\underline{x})$ gilt:

$$\int \frac{d\vec{k}}{k_0} \tilde{j}_\mu(\underline{k}) j_\mu^*(\underline{k}) = 0, \quad \mu = 0, \dots, 3. \quad (\text{ohne } \mu - \text{Summation}) \quad (4.3/2)$$

Hierdurch ist eine Äquivalenzrelation im $\mathbb{R}$ - Vektorraum aller $j_\mu^{\text{lr}}(\underline{x}) \equiv 0$ erfüllenden klassisch zulässigen $j_\mu(\underline{x})$ eingeführt, falls man zusätzlich voraussetzt, daß alle in Betracht gezogenen $j_\mu(\underline{x})$ nur in einem gemeinsamen beschränkten (aber beliebig großen) Raumgebiet von Null verschieden sind. Im Rahmen einer klassisch vorgegebenen Viererstromdichte bedeutet das natürlich keine nennenswerten Einschränkung.

Die nunmehr eingeführte Äquivalenzrelation erlaubt es, wenigstens die für quadratintegrables g_μ notwendige Bedingung $Q = 0$ zu erfüllen: man bringt einfach "hinter dem Sirius" eine die Ladung $\int d^3x \tilde{j}_0(\underline{x})$ kompensierende Gegenladung $\int d^3x \tilde{j}_0(\underline{x})$ an. Eine geringfügige Verallgemeinerung dieser Kompensation führt nun bereits zu einer hinreichenden Bedingung für $g_\mu \in L^2(\mathbb{R}^3)$:

- c) Zu klassisch zulässigem $j_\mu(\underline{x})$ gibt es ein klassisch äquivalentes $j'_\mu(\underline{x})$ derart, daß das diesem entsprechende $g'_\mu(\underline{k})$ quadratintegrabel ist.

Zum Beweis machen wir den Kompensationsansatz

$\tilde{j}_\mu(\underline{x}) =: -j_\mu(\underline{x} - \underline{R})$, wobei wir den Betrag R des Ortsvektors $\underline{R}$ anschließend hinreichend groß wählen. Für

$j_\mu(\underline{x}) = j_\mu(\underline{x}) + \tilde{j}_\mu(\underline{x})$ erhält man dann

$j_\mu(\underline{k}) = j_\mu(\underline{k}) \{ 1 - e^{-i\underline{k} \cdot \underline{R}} \}$, so daß (ohne μ - Summation):

$$\int d\vec{k} j_\mu^*(\underline{k}) g_\mu(\underline{k}) = 4 \int \frac{d\vec{k}}{k_0} j_\mu^*(\underline{k}) j'_\mu(\underline{k}) = 4 \int \frac{d\vec{k}}{k_0} j_\mu^*(\underline{k}) j_\mu(\underline{k}) \frac{1 - \cos(\underline{k} \cdot \underline{R})}{k_0}.$$

$\int \frac{d\underline{k}}{k_0} j_\mu^*(\underline{k}) j_\mu(\underline{k})$ existiert nach Voraussetzung. Der Faktor $\frac{1 - \cos(\underline{k}\underline{R})}{k_0}$ verbessert die Konvergenz dieses Integrals sowohl für $k_0 \rightarrow \infty$, als auch für $\underline{k} \rightarrow \underline{0}$. Zur zweiten Behauptung:

$$\frac{1 - \cos(\underline{k}\underline{R})}{k_0} = \frac{1}{2k_0} (\underline{k}\underline{R})^2 - \dots \quad \text{und}$$

$$\frac{(\underline{k}\underline{R})^2}{|\underline{k}|} = \left\{ \frac{(\underline{k}\underline{R})^2 (\underline{k}\underline{R})^2}{|\underline{k}|} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ |\underline{k}|^3 |\underline{R}|^4 \right\}^{\frac{1}{2}} = |\underline{R}|^2 \cdot |\underline{k}|^{\frac{3}{2}}.$$

Anschaulich ist klar, daß für genügend großes $|\underline{R}|$ auch die Forderung (4.3/2) erfüllt ist. Rechnerisch treten Integrale $\int d^3k \tilde{j}_\mu j_\mu^* \cos(\underline{k}\underline{R})$, $\int d^3k \tilde{j}_\mu j_\mu^* \sin(\underline{k}\underline{R})$ auf, deren Integranden bei großem $|\underline{R}|$ und stetigem j_μ so rasch oszillieren (als Funktionen von $\underline{k}$), daß die Integrale verschwinden.

Im Rahmen einer Theorie, die nur klassisch zulässige und überdies stationäre $j_\mu(\underline{x})$ in Betracht zieht und die ferner eine physikalische Situation durch jede Stromdichte $j_\mu(\underline{x})$, $j_\mu'(\underline{x})$, ... ein und derselben Äquivalenzklasse als gleichwertig beschrieben ansieht, stellt demnach die Forderung nach quadratintegriertem g_μ keinerlei zusätzliche Einschränkung dar.

4.4: Der Zeitentwicklungsoperator.

Die in 4.2 gewonnene pseudounitäre Zeitentwicklung soll im folgenden aus der allgemeinen Theorie des Zeitentwicklungsoperators noch auf einem zu 4.2 parallelen Weg hergeleitet werden.

Dabei verwenden wir neben dem Schrödingerbild (Index S) auch das Wechselwirkungs- oder Diracbild (Index D). Ist H_0 der freie Hamiltonoperator, so transformiert man die Darstellungen ineinander durch ([12]):

$$\begin{aligned} |\phi\rangle_S &= e^{itH_0} |\phi\rangle_D && \text{für Vektoren} \\ \omega_D &= e^{-itH_0} \omega_S e^{-itH_0} && \text{für Operatoren} \end{aligned} \quad (4.4/1)$$

Aus (4.4/1) folgt insbesondere $H_0 = (H_0)_S = (H_0)_D$. In beiden Bildern soll nun der Zeitentwicklungsoperator U_S bzw. U_D einen Vektor längs seiner Schrödingerkurve verschieben:

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle_S &= U_S(t; t_0) |\phi(t_0)\rangle_S, \\ |\phi(t)\rangle_D &= U_D(t; t_0) |\phi(t_0)\rangle_D. \end{aligned} \quad (4.4/2)$$

Insbesondere muß $U_S(t_0; t_0) = 1 = U_D(t_0; t_0)$ sein.

Ist der gesamte Hamiltonoperator jeweils $H_S = H_0 + H_{WS}$ bzw. $H_D = H_0 + H_{WD}$, so gelten für die Zeitentwicklungsoperatoren die Beziehungen ([12]):

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U_S(t; t_0) &= H_S(t) U_S(t; t_0), \\ i \frac{\partial}{\partial t} U_D(t; t_0) &= H_{WD}(t) U_D(t; t_0). \end{aligned} \quad (4.4/3)$$

Nach diesen Vorbemerkungen berechnen wir U_S und U_D zum Hamiltonoperator H von 4.1. Danach ist

$$H_{WD} = \int d^3k \left\{ e^{-itk_0} j_\mu^*(k, t) a_\mu^\dagger(k) + e^{-itk_0} j_\mu(k, t) a_\mu^\dagger(k) \right\} \quad (4.4/4)$$

Für $U_S(t; t_0)$ machen wir entsprechend (4.2/1) den Ansatz

$$U_S(t; t_0) = e^{-i\varphi(t)} \exp \int d\underline{k} \left\{ -\tilde{g}_\mu^*(\underline{k}, t) a_\mu^\dagger(\underline{k}) + \tilde{g}_\mu^\dagger(\underline{k}, t) \tilde{a}_\mu^*(\underline{k}) \right\} \quad (4.4/5)$$

t_0 tritt rechts nicht explizit auf, bestimmt die g_μ aber in der Weise mit, daß $g_\mu(\underline{k}, t_0) = 0$ für alle $\underline{k}$ ist. Diese Bedingung wird anschließend den Anfangszeitpunkt einer Integration bestimmen. Mit (4.4/1) erhalten wir aus (4.4/5) $U_D(t; t_0)$, indem wir g_μ in (4.4/5) durch $\tilde{g}_\mu(\underline{k}, t) = e^{itk_0} g_\mu(\underline{k}, t)$ ersetzen. Aus (4.4/3) ergibt sich dann zunächst ($\dot{} = \frac{\partial}{\partial t}$):

$$i \dot{U}_D U_D^* = H_{WD} \quad \text{und mit (4.2/4):}$$

$$\dot{\varphi} + i \int d\underline{k} \left\{ -\tilde{g}_\mu^* a_\mu^\dagger + \tilde{g}_\mu \tilde{a}_\mu^* + \frac{1}{2} (\tilde{g}_\mu^* \tilde{g}_\mu - \tilde{g}_\mu^* \tilde{g}_\mu) \right\} = H_{WD}.$$

Ein Vergleich beider Seiten liefert als hinreichende Bedingung

$$i \tilde{g}_\mu = e^{itk_0} g_\mu(\underline{k}, t),$$

was für g_μ zur Gleichung (4.2/6) führt. Für $\dot{\varphi}$ erhält man einen mit (4.2/5) identischen Ausdruck. Wegen $U(t_0; t_0) = 1$ ist in der Lösung (4.2/7) der Integrationsbeginn $\tau = t_0$ zu setzen ($x_0 = t$).

Damit zeigt die Anwendung des Zeitentwicklungsoperators auf noch kürzerem Wege als die direkte Rechnung von 4.2, daß durch jeden Vektor $|\Phi\rangle \in \mathbb{D}_H$ eine Schrödingerkurve $|\Phi(x_0)\rangle$ gezogen werden kann, wobei gilt:

$$|\Phi(x_0)\rangle = e^{-i\varphi(x_0)} \exp \int d\underline{k} \left\{ -ie^{ik_0 x_0} \int_{\tau}^{x_0} dt e^{-ik_0 t} \tilde{g}_\mu^*(\underline{k}, t) a_\mu^\dagger(\underline{k}) + \text{cc.} \right\} |\Phi\rangle,$$

$$|\Phi(\tau)\rangle = |\Phi\rangle.$$

4.5: Die Lorentzbedingung.

Nach 4.2 kann jeder Vektor $|\phi(x_0)\rangle \in \mathcal{H}_H(F')$ in der Form $|\phi(x_0)\rangle = G(x_0)|\phi_0(x_0)\rangle$ mit $|\phi_0(x_0)\rangle$ aus der (a_μ) - Nullfaser geschrieben werden, falls seine Norm nicht verschwindet. $G(x_0)$ ist dann eindeutig festgelegt. Nach (4.2/7) hat die $G(x_0)$ definierende Vierervektorfunktion g_μ die Form

$$g_\mu(\underline{k}, x_0) = e^{-ik_0 x_0} \left\{ \delta_\mu(\underline{k}) - i \int_{\tau}^{x_0} dt e^{-ik_0 t} j_\mu(\underline{k}, t) \right\}. \quad (4.5/1)$$

$\delta_\mu(\underline{k})$ hat darin die Bedeutung eines Anpassungsterms: Durch jeden Vektor $|\phi\rangle \in \mathbb{D}_H$ läßt sich ja genau eine durch H bestimmte Schrödingerkurve ziehen. Soll diese Kurve $|\phi(x_0)\rangle$ zum Parameterwert $x_0 = \tau$ den vorgegebenen Vektor $|\phi\rangle$ erreichen, muß $G(\tau)|\phi_0(\tau)\rangle = |\phi(\tau)\rangle = |\phi\rangle$ sein. Dementsprechend ist nach (4.2/9) das in (4.5/1) noch offene $\delta_\mu(\underline{k})$ so zu wählen, daß

$$e^{-ik_0 \tau} \delta_\mu(\underline{k}) = \frac{\langle \phi | a_\mu(\underline{k}) | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle}. \quad (4.5/2)$$

Wir wollen nun im folgenden den "Anfangsvektor" $|\phi\rangle = |\phi(\tau)\rangle$ einer durch H bestimmten Schrödingerkurve in einem der Lorentzräume $F_L(1)$ annehmen. Zu untersuchen ist, unter welchen Voraussetzungen dann die gesamte, durch $|\phi\rangle$ gezogene Schrödingerkurve in diesem Raum $F_L(1)$ bleibt. Die Fragestellung erscheint wichtig im Hinblick auf die physikalisch bedeutsamen Eigenschaften der Lorentzräume (2.1).

Soll also $|\phi(x_0)\rangle$ dem durch $l = l(\underline{k})$ bestimmten Raum $F_L(1)$ angehören, gilt für alle x_0 eine Eigenwertgleichung

$$L(\underline{k})|\phi(x_0)\rangle = l(\underline{k})|\phi(x_0)\rangle, \quad (4.5/3)$$

wobei $l(\underline{k})$ zeitunabhängig ist.

Andererseits setzen wir voraus, daß H Lorentzobservable sein soll: Nach 2.4.b ist dann sichergestellt, daß eine in $F_L(1)$ startende Schrödingerkurve diesen Raum nicht verläßt. Wegen (2.2/2) ist für H damit insbesondere zu fordern:

$$[L(\underline{k}), H]|\Phi(x_0)\rangle = 0 \text{ für alle } x_0.$$

Mit (4.1/5) und (4.5/3) folgt daraus

$$\{k_0 l(\underline{k}) + k^\nu j_\nu(\underline{k}, x_0)\} |\Phi(x_0)\rangle = 0.$$

$|\Phi(x_0)\rangle$ sollte nichtverschwindende Norm besitzen, muß also von Null verschieden sein. Daher folgt weiter

$$-\frac{1}{k_0} \cdot k^\nu j_\nu(\underline{k}, x_0) = l(\underline{k}). \quad (4.5/4)$$

Beachtet man noch die Stromerhaltung $j_\mu^{1\mu}(x) \equiv 0$, die bezüglich der Fourierkomponenten zu

$$i\partial^0 j_0(\underline{k}, x_0) = k^\tau j_\tau(\underline{k}, x_0) \quad (4.5/5)$$

führt, erhält man aus (4.5/4) die Gleichung

$$-\frac{i}{k_0} \partial^0 j_0(\underline{k}, x_0) + j_0(\underline{k}, x_0) = l(\underline{k}). \quad (4.5/6)$$

Nehmen wir $F_L(1)$ und damit $l(\underline{k})$ als vorgegeben an, sind durch (4.5/6) die zulässigen Ladungsdichten bestimmt:

Mit einer beliebigen zeitunabhängigen Funktion $\tilde{j}_0(\underline{k})$ ist die allgemeine Lösung von (4.5/6):

$$j_0(\underline{k}, x_0) = l(\underline{k}) + e^{-ik_0 x_0} \tilde{j}_0(\underline{k}). \quad (4.5/7)$$

Setzt man weiterhin voraus, daß die vorzugebende Ladungsdichte für $x_0 \rightarrow -\infty$ einen bestimmten, nicht notwendig verschwindenden Grenzwert hat, so existiert $\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} j_0(\underline{k}, x_0)$. Die Existenz dieses Grenzwertes ist mit (4.5/7) nur verträglich, wenn dort $\tilde{j}_0(\underline{k}) \equiv 0$ gesetzt wird. Unter diesen Voraussetzungen ist dann $j_0(\underline{k}, x_0)$ völlig zeitunabhängig $=: j_0(\underline{k})$ und stimmt mit $l(\underline{k})$ überein. Damit ist erhalten:

Sei $|\Phi\rangle \in F_L(1)$ mit $\langle \Phi | \Phi \rangle \neq 0$. Ferner sei $|\Phi\rangle \in \mathcal{D}_H$. Für die vorgegebene Ladungsdichte existiere der Grenzwert $\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} j_0(\underline{k}, x_0)$.

Genau dann verläßt die durch $|\phi\rangle$ gezogene Schrödingerkurve den Raum $F_L(1)$ nicht, wenn $j_o(\underline{k}, x_o) = j_o(\underline{k})$ zeitunabhängig ist und

$$l(\underline{k}) = j_o(\underline{k}) \text{ gilt.} \quad (4.5/8)$$

Die Forderung, daß $\lim_{x_o \rightarrow -\infty} j_o(\underline{k}, x_o)$ existieren soll, ist nicht sehr einschneidend: Bei experimentell hergestellten Ladungsdichten kann wohl meist vorausgesetzt werden, daß lange vor dem Aufbau des Versuches die Ladungsdichte zeitlich konstant war. Außer Betracht bleibt natürlich hier der möglicherweise interessante Fall eines seit unendlich langer Zeit schwingenden Ladungsdipols. Ein solcher hätte allerdings bis zur Gegenwart einen unendlichen Energiebetrag in den Raum gestrahlt, so daß die physikalische Brauchbarkeit eines solchen Modells doch wieder fragwürdig erscheint.

Wir kehren zur Bedingung (4.5/8) zurück, die besagt, daß bei vorgegebenem $j_o(\underline{k})$ es höchstens im Lorentzraum $F_L(j_o)$ Schrödingerkurven gibt, die den Raum nicht verlassen. Um diese Tatsache auch von der expliziten Konstruktion der Schrödingerkurven her verständlich zu machen, nehmen wir wieder einen Anfangsvektor $|\phi\rangle$ aus $F_L(1) \cap D_H$ mit $\langle \phi | \phi \rangle \neq 0$ an. Durch $|\phi\rangle$ werde eine Schrödingerkurve $|\phi(x_o)\rangle$ so gezogen, daß $|\phi(x_o)\rangle \in F_L(1)$ für alle x_o und $|\phi(\tau)\rangle = |\phi\rangle$ ist.

Dann kann, wie zu Beginn dieses Abschnittes erwähnt, $|\phi(x_o)\rangle$ in der Form $G(x_o)|\phi_o(x_o)\rangle$ geschrieben werden. $G(x_o)$ ist durch g_μ laut (4.5/1) bestimmt; δ_μ ist durch $|\phi\rangle$ und τ nach (4.5/2) festgelegt.

Daher muß mit (2.1/2) die Funktion $l(\underline{k})$ auf folgende Arten geschrieben werden können:

$$l(\underline{k}) = k^\nu g_\nu(\underline{k}, x_o) \quad \text{für alle } x_o \text{ und}$$

$$l(\underline{k}) = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{\tau}} k^\nu \delta_\nu(\underline{k}),$$

$$(4.5/9)$$

denn $|\phi(x_0)\rangle$ gehört für alle x_0 (insbesondere $x_0 = \tau$) $F_L(1)$ an.

Andererseits folgt aus (4.5/1)

$$k^V g_V(\underline{k}, x_0) = e^{-ik_0 \tau} k^V g_V(\underline{k}) \cdot e^{-ik_0(x_0 - \tau)} = e^{-ik_0 x_0} \int_{\tau}^{x_0} dt e^{ik_0 t} k^V j_V(\underline{k}, t).$$

Wegen des zeitlich konstanten $j_0(\underline{k})$, das wir voraussetzen wollen, ist nach (4.5/5) $k^T j_T(\underline{k}, t) = 0$, also $k^V j_V(\underline{k}, t) = -k_0 j_0(\underline{k})$, so daß aus (4.5/9)

$$l(\underline{k}) - j_0(\underline{k}) = [l(\underline{k}) - j_0(\underline{k})] e^{-ik_0(x_0 - \tau)}$$

entsteht, was nur bei (4.5/8) für alle x_0 gelten kann.

Mit diesen Ergebnissen kann nun abschließend auch gesagt werden, unter welchen Voraussetzungen H Lorentz-observable ist:

Notwendig und hinreichend dafür ist, daß j_0 zeitlich konstant ist und daß der Definitionsbereich von H , soweit er Lorentzräume betrifft, auf $F_L(j_0)$ eingeschränkt wird. Diese Einschränkung erfolgt sozusagen künstlich; aber wir hatten schon bei der Definition der Lorentzobservablen erwähnt, daß ein Operator u. U. durch geeignete Beschränkung seines Definitionsbereichs zur Lorentzobservablen gemacht werden kann. Beispielsweise wurde der freie Hamiltonoperator H_0 nach den Überlegungen in § 3, Einleitung dadurch zur Lorentz-observable, daß man seinen Definitionsbereich auf $F_L(0)$ einschränkte.

4.6: g_μ und die Erwartungswerte für Feldstärken und Potentiale.

Jedem $|\phi\rangle \in F'$ nichtverschwindender Norm ein und derselben (a_μ) - Faser ist durch die Abbildung

$$\tau_\mu(\underline{k}): |\phi\rangle \longrightarrow \varepsilon_\mu(\underline{k}) := \frac{\langle \phi | a_\mu(\underline{k}) | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} \quad (4.6/1)$$

der gleiche Vierervektor $\varepsilon_\mu(\underline{k})$ zugeordnet. Gilt noch $|\phi\rangle \in \mathbb{D}_H$, so kann durch $|\phi\rangle$ eine Schrödingerkurve $|\phi(x_0)\rangle$ so gezogen werden, daß bei vorgegebenem Wert τ des Zeitparameters $|\phi(\tau)\rangle = |\phi\rangle$ wird. Erweitern wir dementsprechend (4.6/1) zu

$$\tau_\mu(\underline{k}): |\phi(x_0)\rangle \longrightarrow \varepsilon_\mu(\underline{k}, x_0), \quad (4.6/2)$$

wodurch insbesondere $g_\mu(\underline{k}, \tau) = \varepsilon_\mu(\underline{k})$ nach (4.6/1) wird, so müssen sich die Erwartungswerte von Viererpotential $A_\mu(\underline{x})$ und elektromagnetischer Feldstärke $F_{\mu\nu}(\underline{x})$ laut Definition (1.3/5) und (2.2/3) eindeutig durch die $\varepsilon_\mu(\underline{k}, x_0)$ ausdrücken lassen. Mit anderen Worten: Jedem Vektor einer festen (a_μ) - Faser ist derselbe Erwartungswert bezüglich $A_\mu(\underline{x})$ und $F_{\mu\nu}(\underline{x})$ zugeordnet, so daß die (a_μ) - Fasern einen direkten Bezug zu physikalischen Größen besitzen (im Gegensatz zu den Normfasern).

Umgekehrt ist es sicher nicht möglich, $\varepsilon_\mu(\underline{k}, x_0)$ eindeutig durch die Erwartungswerte von $F_{\mu\nu}(\underline{x})$ auszudrücken: Gewinnt man nämlich $|\phi'\rangle$ aus $|\phi\rangle$ durch Umzeichnung gemäß 3.3, also in der Form $|\phi'\rangle = E|\phi\rangle$, $E \in \mathcal{E}$, so besitzen $|\phi\rangle$ und $|\phi'\rangle$ gleiche Erwartungswerte bezüglich $F_{\mu\nu}(\underline{x})$; die nach (4.6/2) jeweils bestimmten g_μ und g'_μ unterscheiden sich jedoch (additiv) durch einen "Eichterm" $k_\mu \varepsilon(\underline{k}) \bar{e}^{-ik_0 x_0}$.

Im folgenden sollen die Erwartungswerte der elektromagnetischen Feldstärken durch die g_μ ausgedrückt

werden. Mit den gefundenen Beziehungen berechnen wir die klassischen Feldenergieanteile in der Erwartung, damit eine Interpretation für $\int d^3k \, k_0 \, g_\mu^*(\underline{k}, x_0) g^\mu(\underline{k}, x_0)$ zu gewinnen. Im allgemeinen wird dieses Integral jedoch keineswegs gleich $\frac{1}{2} \int d^3k [\underline{E}^2(\underline{x}) + \underline{B}^2(\underline{x})]$ sein, denn dieser letzte Ausdruck ist invariant gegenüber der oben erwähnten Umeichung $|\phi\rangle \longrightarrow |\phi'\rangle = E|\phi\rangle$, $E \in \mathcal{E}$, während $\int d^3k \, k_0 \, g_\mu^* g^\mu$ dabei einen additiven Zusatzterm der Art $\int d^3k \, k_0 [k_\nu g_\nu^* \varepsilon(\underline{k}) e^{-i k_0 x_0} + c.c.]$

erhält, der wie sich gleich zeigen wird, nur im Falle $j_0(\underline{k}, x_0) \equiv 0$ verschwindet.

Für die anschließende Rechnung setzen wir nicht voraus, daß sich die betrachtete Schrödingerkurve in einem einzigen Lorentzraum aufhalten soll. Jedoch ist eine physikalisch nicht gravierende Einschränkung bezüglich $j_0(\underline{k}, x_0)$ zu machen:

Aus (4.5/1) und (4.5/5) erhält man zunächst allgemein

$$k^\mu g_\mu(\underline{k}, x_0) = e^{-i k_0 x_0} \cdot [k^\mu g_\mu(\underline{k}) - j_0(\underline{k}, \tau) e^{-i k_0 \tau}] + j_0(\underline{k}, x_0).$$

Wie in 4.5 wollen wir voraussetzen, daß $\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} j_0(\underline{k}, x_0)$ existiert. Zusätzlich wird gefordert, daß auch $\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} k^\mu g_\mu(\underline{k}, x_0)$ existieren soll. Diese letzte Forderung bedeutet geometrisch, daß der Vektor $|\phi(x_0)\rangle$ für $x_0 \rightarrow -\infty$ "schließlich" in einem bestimmten Lorentzraum landet.

Dann muß aber der Wert der eckigen Klammer in der letzten Gleichung verschwinden und gelten:

$$k^\mu g_\mu(\underline{k}, x_0) = j_0(\underline{k}, x_0),$$

was mit der Abkürzung $\underline{g} = (g_1, g_2, g_3)$ auch als

$$\underline{k} \cdot \underline{g}(\underline{k}, x_0) = k_0 g_0(\underline{k}, x_0) + j_0(\underline{k}, x_0) \quad (4.6/3)$$

geschrieben werden kann.

(4.6/3) verallgemeinert (4.5/8) und wird bei der folgenden Berechnung der Feldenergieanteile mehrmals benutzt.

Mit (1.3/5) und (2.2/3) hatten wir definiert:

$$A_{\mu}(\underline{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} \left[e^{i\underline{k}\underline{x}} a_{\mu}(\underline{k}) + e^{-i\underline{k}\underline{x}} a_{\mu}^*(\underline{k}) \right],$$

$$F_{\mu\nu}(\underline{x}) = i(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} \left\{ e^{i\underline{k}\underline{x}} [a_{\mu}(\underline{k}) k_{\nu} - a_{\nu}(\underline{k}) k_{\mu}] - \right.$$

$$\left. - e^{-i\underline{k}\underline{x}} [a_{\mu}^*(\underline{k}) k_{\nu} - a_{\nu}^*(\underline{k}) k_{\mu}] \right\}. \quad (4.6/4)$$

Für die Erwartungswerte $A_{\mu}(\underline{x}) = \frac{\langle \Phi(x_0) | A_{\mu}(\underline{x}) | \Phi(x_0) \rangle}{\langle \Phi(x_0) | \Phi(x_0) \rangle}$

bzw. $F_{\mu\nu}(\underline{x}) = \frac{\langle \Phi(x_0) | F_{\mu\nu}(\underline{x}) | \Phi(x_0) \rangle}{\langle \Phi(x_0) | \Phi(x_0) \rangle}$ bezüglich einer

durch H gegebenen Schrödingerkurve gilt dann auf Grund von (4.6/2)

$$A_{\mu}(\underline{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} e^{i\underline{k}\underline{x}} g_{\mu}(\underline{k}, x_0) + \text{cc.}, \text{ sowie}$$

$$F_{\mu\nu}(\underline{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} e^{i\underline{k}\underline{x}} \cdot i [g_{\mu}(\underline{k}, x_0) k_{\nu} - g_{\nu}(\underline{k}, x_0) k_{\mu}] + \text{cc.}$$

Um die Fourierkomponenten $A_{\mu}(\underline{k}, x_0)$ bzw. $F_{\mu\nu}(\underline{k}, x_0)$ angeben zu können, schreiben wir

$$A_{\mu}(\underline{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} e^{i\underline{k}\underline{x}} [g_{\mu}(\underline{k}, x_0) + g_{\mu}^*(-\underline{k}, x_0)], \text{ sowie}$$

$$F_{\mu\nu}(\underline{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}} e^{i\underline{k}\underline{x}} [g_{\mu\nu}(\underline{k}, x_0) + g_{\mu\nu}^*(-\underline{k}, x_0)], \text{ wobei}$$

$$g_{\mu\nu}(\underline{k}, x_0) =: i [g_{\mu}(\underline{k}, x_0) k_{\nu} - g_{\nu}(\underline{k}, x_0) k_{\mu}] \quad (4.6/5)$$

gesetzt ist und erhalten

$$A_{\mu}(\underline{k}, x_0) = \frac{1}{\sqrt{2k_0}} [g_{\mu}(\underline{k}, x_0) + g_{\mu}^*(-\underline{k}, x_0)]$$

$$F_{\mu\nu}(\underline{k}, x_0) = \frac{1}{\sqrt{2k_0}} [g_{\mu\nu}(\underline{k}, x_0) + g_{\mu\nu}^*(-\underline{k}, x_0)]. \quad (4.6/6)$$

Faßt man wieder g_1, g_2, g_3 zum Vektor $\underline{g}$ zusammen, erhält man aus (4.6/6) für die Fourierkomponenten der Feldstärken $\underline{E}(\underline{x})$ bzw. $\underline{B}(\underline{x})$:

$$\underline{E}(\underline{k}, \underline{x}_0) = \frac{i}{\sqrt{2k_0}} \left\{ \underline{k} [g_0(\underline{k}, x_0) + g_0^*(-\underline{k}, x_0)] - k_0 [g(\underline{k}, x_0) - g^*(-\underline{k}, x_0)] \right\} \quad (4.6/7)$$

$$\underline{B}(\underline{k}, \underline{x}_0) = \frac{i}{\sqrt{2k_0}} \left\{ [\underline{k} \times \underline{g}(\underline{k}, x_0)] + [\underline{k} \times \underline{g}^*(-\underline{k}, x_0)] \right\}. \quad (4.6/8)$$

Die Ausdrücke (4.6/7,8) können nicht vereinfacht werden, denn im allgemeinen ist $g_\mu(\underline{k}, \underline{x}_0) \neq g_\mu(-\underline{k}, \underline{x}_0)$ (schon auf Grund der Def. (4.6/2)); wegen der Reellwertigkeit muß aber $\underline{E}(\underline{k}, \underline{x}_0) = \underline{E}^*(-\underline{k}, \underline{x}_0)$ und $\underline{B}(\underline{k}, \underline{x}_0) = \underline{B}^*(-\underline{k}, \underline{x}_0)$ gelten.

(4.6/7,8) benutzen wir weiterhin zur Berechnung der Feldenergieanteile der Maxwell'schen Elektrodynamik. Bei der Rechnung wird (4.6/3) mehrfach verwendet. Es entsteht:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3x \underline{E}^2(x) &= \frac{1}{2} \int d^3k \underline{E}(\underline{k}, x_0) \underline{E}^*(\underline{k}, x_0) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3k k_0 g_v^*(\underline{k}, x_0) g_v(\underline{k}, x_0) - \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{v=0}^3 \int d^3k k_0 [g_v(\underline{k}, x_0) g_v(-\underline{k}, x_0) + g_v^*(\underline{k}, x_0) g_v^*(-\underline{k}, x_0)] - \\ &- \int d^3k [g_0^*(\underline{k}, x_0) j_0(\underline{k}, x_0) + g_0(\underline{k}, x_0) j_0^*(\underline{k}, x_0)] \end{aligned} \quad (4.6/9)$$

Der letzte Term hierin ist $-\int d^3x j_0(x) A_0(x)$, also die negativ genommene potentielle Energie der Ladungsdichte im Potential $A_0(x)$.

Analog erhält man für die magnetische Feldenergie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3x \underline{B}^2(x) &= \frac{1}{2} \int d^3k \underline{B}(\underline{k}, x_0) \underline{B}^*(\underline{k}, x_0) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3k k_0 g_v^*(\underline{k}, x_0) g_v(\underline{k}, x_0) + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{v=0}^3 \int d^3k k_0 [g_v(\underline{k}, x_0) g_v(-\underline{k}, x_0) + g_v^*(\underline{k}, x_0) g_v^*(-\underline{k}, x_0)] \end{aligned} \quad (4.6/10)$$

Zusammenfassung von (4.6/9,10) liefert:

$$\int d^3k k_0 g_v^*(\underline{k}, x_0) g_v(\underline{k}, x_0) = \frac{1}{2} \int d^3x [\underline{E}^2(x) + \underline{B}^2(x)] + \int d^3x j_0(x) A_0(x). \quad (4.6/11)$$

$\int d^3k \, k_0 g^\dagger g^V$ gibt also die elektromagnetische Gesamtenergie einschließlich der potentiellen Energie der Ladungsdichte im vorhandenen elektrischen Feld an.

Das Auftreten von $A_0(x)$ in (4.6/11) zeigt einerseits die fehlende Eichinvarianz von $\int d^3k \, k_0 g^\dagger g^V$, andererseits, daß dieses Integral auch negative Werte annehmen kann.

4.7: g_μ und die Photonendichte.

Mit (1.4/9) und (2.1/4) hatten wir das Problem aufgeworfen und teilbeantwortet, unter welchen Voraussetzungen der Erwartungswert der Photonendichte $n(\underline{k}) = a_v^*(\underline{k})a_v(\underline{k})$ nichtnegativ ist. Diese Fragestellung erscheint wichtig einerseits im Hinblick auf die Interpretierbarkeit von $n(\underline{k})$ bzw. $N = \int d\underline{k} n(\underline{k})$ eben als Photonendichte bzw. Gesamtphotonenzahl, andererseits wegen des Vorzeichens des Erwartungswertes von $H_0 = \int d\underline{k} k_0 n(\underline{k})$.

Als hinreichende Voraussetzung für

$$\frac{\langle \Phi | n(\underline{k}) | \Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle} \geq 0 \quad (4.7/1)$$

hatte sich in (2.1/4) die Bedingung $|\Phi\rangle \in F_L(0)$ erwiesen.

Im folgenden soll untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen bezüglich $|\Phi\rangle$ und $j_\mu(\underline{k}, x_0)$ die Eigenschaft (4.7/1) sogar für alle Vektoren einer durch $|\Phi\rangle$ gelegten Schrödingerkurve sichergestellt werden kann.

Die Einschränkungen hinsichtlich $|\Phi\rangle$ ergeben sich folgendermaßen:

Sei H vorgegeben und $|\Phi\rangle \in \mathcal{D}_H$ mit $\langle \Phi | \Phi \rangle \neq 0$. Dann kann durch $|\Phi\rangle$ eine Schrödingerkurve $|\Phi(x_0)\rangle$ so gezogen werden, daß $|\Phi(\tau)\rangle = |\Phi\rangle$. Nach (4.2/10) ist für alle x_0 der Vektor $|\Phi(x_0)\rangle = G(x_0)|\Phi_0(x_0)\rangle$, wobei $|\Phi_0(x_0)\rangle$ eine freie Schrödingerkurve in der (a_μ) -Nullfaser durchläuft und $G(x_0)$ durch g_μ nach (4.2/7) bestimmt wird. Der in g_μ auftretende Term δ_μ ist eindeutig durch die Vorgabe von $|\Phi\rangle$ und τ festgelegt. Nach (1.4/9) ist dann

$$\frac{\langle \Phi(x_0) | n(\underline{k}) | \Phi(x_0) \rangle}{\langle \Phi(x_0) | \Phi(x_0) \rangle} = \frac{\langle \Phi_0(x_0) | n(\underline{k}) | \Phi_0(x_0) \rangle}{\langle \Phi_0(x_0) | \Phi_0(x_0) \rangle} + g_v^*(\underline{k}, x_0) g_v(\underline{k}, x_0). \quad (4.7/2)$$

Durch die Voraussetzung $|\phi_0(x_0)\rangle \in F_L(0)$ garantieren wir nach (2.1/4) schon einmal, daß der erste Summand der rechten Seite von (4.7/2) nichtnegativ ist. Einfach nun aber Bedingungen zu suchen, unter denen

$$g_\mu^*(\underline{k}, x_0) g_\mu(\underline{k}, x_0) \geq 0 \quad \text{für alle } \underline{k} \text{ und } x_0. \quad (4.7/3)$$

ist, kann in dieser allgemeinen Form nicht weiter führen: nach (4.2/7) hängt g_μ ja noch von δ_μ und dieses vom Anfangsvektor $|\phi\rangle$ und Anfangszeitpunkt τ ab. δ_μ muß keineswegs eine Bedingung analog (4.7/3) erfüllen und zwar auch dann nicht, wenn $|\phi\rangle$ einem Lorentzraum $F_L(1)$, $1 \neq 0$, angehört. Würde aber gleichwohl δ_μ eine Forderung (4.7/3) erfüllen, so wäre (4.7/3) (für g_μ) nicht notwendig schon dadurch befriedigt, daß für

$$\tilde{g}_\mu(\underline{k}, x_0) = -i e^{-i k_0 x_0} \int_{\tau}^{x_0} dt e^{i k_0 t} j_\mu(\underline{k}, t) \quad (4.7/4)$$

gelten würde:

$$\tilde{g}_\mu^+(\underline{k}, x_0) \tilde{g}_\mu(\underline{k}, x_0) \geq 0 \quad \text{für alle } \underline{k} \text{ und } x_0. \quad (4.7/5)$$

Vielmehr wäre im allgemeinen noch vorauszusetzen, daß δ_μ und $\tilde{g}_\mu$ demselben Raum positiv - semidefiniter Metrik von Vierervektorfunktionen angehören sollen.

Den damit angedeuteten Verzweigungen des Problems wollen wir im einzelnen nicht nachgehen, zumal dabei keine nennenswerten Ergebnisse in Sicht sind. Wir beschränken uns daher weiterhin auf solche Anfangsvektoren $|\phi\rangle$, die $\delta_\mu(\underline{k}) \equiv 0$ garantieren. Aus den genannten Gründen stellen wir nur Anfangsvektoren in Rechnung, die sowohl $F_L(0)$ als auch der (a_μ) - Nullfaser angehören. Dadurch ist sicher, daß für alle $|\phi(x_0)\rangle = G(x_0) |\phi_0(x_0)\rangle$ der durch $|\phi\rangle$ gezogenen Schrödingerkurve stets $|\phi_0(x_0)\rangle \in F_L(0)$ gilt, so daß in (4.7/2) der erste Summand rechts nichtnegativ ist. Damit ist für nichtnegativen Erwartungswert von $n(\underline{k})$ bezüglich $\tilde{g}_\mu$ nach (4.7/4) die Bedingung (4.7/5)

hinreichend.

Nachdem also die Menge der Anfangsvektoren $|\phi\rangle$ geeignet eingeschränkt ist, präzisieren wir die Fragestellung folgendermaßen:

Wie ist $j_\mu(\underline{k}, x_0)$ vorzugeben, damit alle Vektoren $|\phi(x_0)\rangle$ der durch ein zulässiges $|\phi\rangle$ gezogenen Schrödingerkurve nichtnegativen Erwartungswert bezüglich $n(\underline{k})$ für alle $\underline{k}$ haben?

Um die dazu hinreichende Bedingung (4.7/5) näher untersuchen zu können, definieren wir mit den Beziehungen und Bezeichnungen von (2.1/5-7) und (2.3/5):

$$\tilde{g}^{(\lambda)}(\underline{k}, x_0) =: g^{\lambda\lambda} e_\mu^{(\lambda)}(\underline{k}) \tilde{g}^\mu(\underline{k}, x_0). \quad (4.7/6)$$

Insbesondere ergibt sich

$$\tilde{g}^{(0)}(\underline{k}, x_0) = \tilde{g}_0(\underline{k}, x_0) \text{ und } \tilde{g}^{(3)}(\underline{k}, x_0) = \frac{1}{k_0} \underline{k} \tilde{g}(\underline{k}, x_0),$$

wobei $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3)$ gesetzt ist. Damit erhalten wir

$$\tilde{g}_\mu^*(\underline{k}, x_0) \tilde{g}^\mu(\underline{k}, x_0) = \sum_{\lambda=0}^3 g^{\lambda\lambda} \tilde{g}^{*\lambda}(\underline{k}, x_0) \tilde{g}^{(\lambda)}(\underline{k}, x_0) \quad (4.7/7)$$

und man sieht, daß (4.7/5) sichergestellt ist, wenn

$$- \tilde{g}^{(0)*} \tilde{g}^{(0)} + \tilde{g}^{(3)*} \tilde{g}^{(3)} \geq 0, \text{ das heißt, wenn}$$

$$\tilde{g}_0^* \tilde{g}_0 \leq \frac{1}{k_0^2} (\underline{k} \tilde{g})(\underline{k} \tilde{g}^*) \quad (4.7/8)$$

für alle $\underline{k}$ und x_0 richtig ist. An dieser Stelle benötigt man eine Information über $\underline{k} \tilde{g}$, die sich folgendermaßen gewinnen läßt:

Aus (4.5/1) und (4.5/5) sowie der Forderung $\delta_\mu \equiv 0$ folgt zunächst

$$\underline{k} \tilde{g}(\underline{k}, x_0) = k_0 \tilde{g}_0(\underline{k}, x_0) + j_0(\underline{k}, x_0) - j_0(\underline{k}, \tau) e^{-ik_0(x_0 - \tau)}$$

Um die folgenden Rechnungen von Ballast freizuhalten, setzen wir weiterhin voraus:

τ sei so wählbar, daß gilt:

$$j_0(\underline{k}, x_0) = 0 \text{ für alle } \underline{k} \text{ und } x_0 \leq \tau. \quad (4.7/9)$$

Die Forderung (4.7/9), die nicht notwendig ist, sondern nur zur Vereinfachung dient, ist nicht allzu einschneidend: Wenn an eine experimentell vorgegebene Ladungsdichte gedacht wird, etwa an eine schwingende Antenne, so kann oft angenommen werden, daß "vor langer Zeit", z. B. vor Einschalten des Antennenoszillators die Ladungsdichte 0 war (was dann wegen der Stromerhaltung zur Folge hat, daß die Gesamtladung für alle Zeiten verschwindet). Dazu bedarf es nur der Vorstellung, für $x_0 \leq \tau$ seien je zwei Ladungsträger entgegengesetzten Vorzeichens räumlich so vereinigt gewesen, daß sich ihre Ladungen kompensierten und die später hergestellte Ladungsdichte sei durch Trennung dieser Trägerpaare entstanden.

Den Fall zeitlich konstanter, aber von Null verschiedener Ladungsdichte haben wir damit allerdings ausgeschlossen und zwar bereits dadurch, daß wir für den "Anfangsvektor" $|\phi\rangle$ forderten, er solle der (a_μ) -Nullfaser angehören. In dieser Eigenschaft besitzt $|\phi\rangle$ ja verschwindende Erwartungswerte für die elektromagnetischen Potentiale, so daß insbesondere $j_0 = 0$ folgt.

Mit (4.7/9) gilt also:

$$\underline{k} \tilde{g}(\underline{k}, x_0) = k_0 \tilde{g}_0(\underline{k}, x_0) + j_0(\underline{k}, x_0). \quad (4.7/10)$$

(4.7/10) führt in (4.7/8) zu

$$\frac{1}{k_0} j_0^* j_0 + \tilde{g}_0^* j_0 + \tilde{g}_0^* j_0 \geq 0.$$

Mit (4.7/7) ergibt sich schließlich für jedes $\underline{k}$:

$$j_0^*(\underline{k}, x_0) j_0(\underline{k}, x_0) \leq e^{-ik_0 x_0} j_0^*(\underline{k}, x_0) \int_{\tau}^{x_0} dt e^{ik_0 t} \partial_t j_0(\underline{k}, t) + cc. \quad (4.7/11)$$

Um die durch (4.7/11) an die Art der Zeitabhängigkeit

von j_0 gestellte Bedingung physikalisch verständlicher zu machen, betrachten wir folgende Beispiele für j_0 :

Es sei zunächst eine exponentiell von der Zeit abhängige Ladungsdichte gegeben (ähnliche Ausdrücke verwendet man als asymptotische Ein- oder Ausschaltterme):

$$j_0(\underline{k}, x_0) = e^{\lambda(\underline{k})x_0} j_0(\underline{k}). \quad (4.7/12)$$

Für alle $\underline{k}$ wird $\lambda(\underline{k}) > 0$ vorausgesetzt. Die Bedingung (4.7/9) ist dann für $\tau \rightarrow -\infty$ erfüllt. Dann ist (4.7/11) erfüllt (und damit auch (4.7/5), denn die Schlüsse lassen sich rückwärts durchlaufen), wenn

$$\lambda(\underline{k}) \geq k_0 \quad \text{für alle } \underline{k} \quad (4.7/13)$$

ist. (4.7/13) erscheint zunächst seltsam, wenn man an ein quasistationäres Einschalten mit $\lambda(\underline{k}) \rightarrow 0$ gedacht hat. Die folgende, auf der Unschärferelation zwischen Energie und Zeit beruhende Plausibilitätsbetrachtung (genauere Überlegungen setzen wohl eine gründliche Analyse der im vorliegenden Fall anzuwendenden Meßmethoden voraus) dürfte jedoch (4.7/13) als eine sehr natürliche Forderung erweisen:

Unter der Voraussetzung (4.7/12) hängt die Energie $w(\underline{k}, x_0)$ der skalaren Photonen mit Impulsen im Bereich $\underline{k}, \dots, \underline{k} + d\underline{k}$ entsprechend

$$w(\underline{k}, x_0) = e^{2\lambda(\underline{k})x_0} w(\underline{k}) \quad (4.7/14)$$

von der Zeit ab.

$$z(\underline{k}, x_0) =: \frac{1}{h_0} w(\underline{k}, x_0) \quad (4.7/15)$$

ist die Anzahl der betreffenden Photonen. Durch Wahl von $d\underline{k}$ sei es möglich, $z(\underline{k}, x_0) = 1$ für festes x_0 zu

erreichen. Der Zeitpunkt der Erzeugung eines weiteren Photons der Energie k_0 kann nicht genauer als bis höchstens auf eine Zeitspanne $dx_0 = 1/2k_0$ festgestellt werden. Umgekehrt: Wird eine Zeitspanne

$$dx_0 =: \frac{1}{2k_0} \quad (4.7/16)$$

vorgegeben und vorausgesetzt, daß innerhalb dx_0 Photonen neu entstehen, so muß deren Energie mindestens k_0 sein.

Nach dem Korrespondenzprinzip wird man weiterhin fordern, daß die klassische, durch j_0 erzeugte Feldenergie (4.7/14) mit der Gesamtenergie der Photonen "pauschal" übereinstimmt. Innerhalb dx_0 muß daher auch die klassische Feldenergie um mindestens k_0 anwachsen, so daß mit (4.7/14 - 16) gilt:

$$dW(\underline{k}, x_0) = 2\lambda(\underline{k})W(\underline{k}, x_0) dx_0 =$$

$$\lambda(\underline{k}) \frac{W(\underline{k}, x_0)}{k_0} = \lambda(\underline{k})Z(\underline{k}, x_0) = \lambda(\underline{k}) \geq k_0.$$

Damit ist (4.7/13) erhalten.

Nach diesen Überlegungen scheint die Bedingung (4.7/11) auf die experimentelle Realisierbarkeit der vorzuziehenden Ladungsdichte hinzuweisen: Mit der Ladungsdichte ändert sich im Zeitablauf auch die Energie des zugehörigen Feldes. Innerhalb einer festen Zeitspanne kann aber keine beliebig kleine Energiedifferenz meßbar (also realistisch: vorhanden) sein, so daß nicht jede mathematisch denkbare $j_0(\underline{k}, x_0)$ - Funktion auch physikalisch zulässig ist.

Zur Diskussion eines zweiten Beispiels nehmen wir zu (4.7/12) noch eine periodische Zeitabhängigkeit hinzu:

$$j_0(\underline{k}, x_0) =: e^{[\lambda(\underline{k}) - i\omega]x_0} j_0(\underline{k}). \quad (4.7/17)$$

ω sei hierin eine feste Kreisfrequenz und es gelte wieder $\lambda(\underline{k}) > 0$ für alle $\underline{k}$.

(4.7/17) erfüllt (4.7/11), wenn

$$\omega^2 \leq \lambda^2(\underline{k}) - k_0^2. \quad (4.7/18)$$

Hat man also gemäß (4.7/13) bereits $\lambda(\underline{k})$ so gewählt, daß $\lambda(\underline{k}) \geq k_0$ für alle $\underline{k}$ ist (um im Falle $\omega = 0$ auch den spezielleren Fall (4.7/12) mit einzuschließen), so gibt (4.7/18) eine Beschränkung der Kreisfrequenz. Damit ist wieder einmal ein Hinweis darauf erhalten, daß die Art der Zeitabhängigkeit der Ladungsdichte entscheidend für eine sinnvolle Quantentheorie im Gupta - Bleuler - Raum ist. Im vorliegenden Beispiel darf sich die Ladungsdichte nicht zu rasch mit der Zeit ändern; andernfalls wäre die Voraussetzung einer klassischen Ladungsdichte verlassen, denn die Quantennatur der individuellen Ladungsträger käme mehr und mehr ins Spiel.

Anhang.

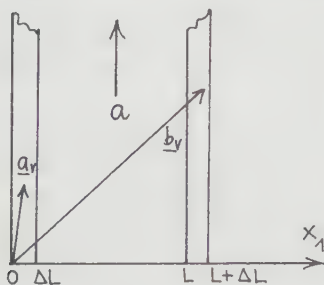
A) Diskussion der Photonendichte zu speziellen Ladungs- und Stromverteilungen.

A.1: Photonendichte zu stationären Ladungsverteilungen.

Für zwei einfache stationäre Ladungsverteilungen gegebener Geometrie (Platten- und Kugelkondensator) sollen im folgenden die Vierervektorfunktionen g_μ berechnet, mit ihnen die Glauberzustände $G|0\rangle$ aufgestellt und nach der Anzahldichte $\langle 0|G^\dagger n(\underline{k})G|0\rangle$ der Photonen diskutiert werden. Man erwartet, daß diese Anzahldichte für solche Impulse maximal wird, daß die zugehörigen Wellenlängen zu bezüglich der gegebenen Geometrie stehenden Wellen gehören.

Um die Rechnungen einfacher gestalten zu können, verwenden wir unbedenklich δ - artige Ladungsverteilungen, obwohl dies nach 4.3 im allgemeinen zu $g_\mu \notin L^2$ führt. Weil aber im folgenden nur $g_\mu^* g_\mu$ in Abhängigkeit von $\underline{k}$ betrachtet wird, dürfte dadurch keine Verfälschung der Endergebnisse eintreten.

Damit im folgenden keine Randeffekte in Rechnung gestellt werden müssen, betrachten wir einen Plattenkondensator unendlicher Ausdehnung (nach Grenzübergang):



Auf der linken Platte befinden sich an den Enden der Ortsvektoren $\underline{a}_v$, gleichmäßig im Endlichen verteilt, N Punktladungen jeweils der Ladung $+\epsilon$.

N Ladungen jeweils der Größe $-\epsilon$ befinden sich an den Endpunkten der Vektoren $\underline{b}_v$ auf

der rechten Platte. Die Platten seien rechteckig (jeweils vor dem Grenzübergang zur unendlichen Plattengröße):

$0 \leq x_2 \leq a$; $0 \leq x_3 \leq a$. Späterhin lassen wir a gegen Unendlich gehen. Damit aber die Schreibweise einfacher bleibt, lassen wir mit $a \rightarrow \infty$ die Platten nur in Richtung der positiven x_2 - und x_3 - Achse anwachsen. Damit dabei keine Ladungen ins Unendliche gebracht werden, führen wir einen Konvergenzterm mit $\lambda \rightarrow +0$ derart ein, daß

$$j_0(\underline{x}) = \varepsilon \sum_{v=1}^N \delta(\underline{x} - \underline{q}_v) e^{-\lambda(x_2+x_3)} - \varepsilon \sum_{v=1}^N \delta(\underline{x} - \underline{b}_v) e^{-\lambda(x_2+x_3)} \quad (\text{A.1/1})$$

Daraus folgt:

$$j_0(\underline{k}) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \varepsilon \sqrt{2k_0} \sum_{v=1}^N \left\{ e^{i\vec{k}\underline{q}_v - \lambda(q_2+a_3)_v} - e^{i\vec{k}\underline{b}_v - \lambda(b_2+b_3)_v} \right\}. \quad (\text{A.1/2})$$

Die Flächendichte der Ladungen ist $\varrho = N\varepsilon/a^2$. Zur Berechnung der Summen:

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^N e^{i\vec{k}\underline{q}_v - \lambda(q_2+a_3)_v} &= \sum_{v=1}^N e^{i\vec{k}\underline{q}_v - \lambda(q_2+a_3)_v} \cdot \frac{\Delta L}{a^2} \frac{dx_2 dx_3}{N} = \\ \frac{N}{a^2} \int_0^a dx_2 dx_3 e^{i(k_2 x_2 + k_3 x_3) - \lambda(x_2+x_3)} &= \frac{N}{a^2} \int_0^a dx_2 dx_3 e^{i(k_2 - \lambda)x_2} e^{i(k_3 - \lambda)x_3} = \\ \frac{N}{a^2 (i(k_2 - \lambda)(1/k_2 - \lambda))} \{ e^{i(k_2 - \lambda)a} - 1 \} \{ e^{i(k_3 - \lambda)a} - 1 \} &\xrightarrow[\lambda \rightarrow +\infty]{\lambda \rightarrow +0} \frac{\varrho}{\varepsilon k_2 k_3} \end{aligned}$$

Analog bei Integration über die rechte Kondensatorplatte. Insgesamt entsteht:

$$j_0(\underline{k}) = -\frac{\varrho}{k_2 k_3} \sqrt{2k_0} (e^{i\vec{k}_1 L} - 1)_1 \quad (\text{A.1/3})$$

$$g_0(\underline{k}) = -\frac{1}{k_0} j_0(\underline{k}) = \varrho \sqrt{\frac{2}{k_0}} \frac{1}{k_2 k_3} (e^{i\vec{k}_1 L} - 1) \quad (\text{A.1/4})$$

Lassen wir zur Vereinfachung die Ströme beiseite, die mit dem Aufbau der Kondensatorladung verbunden waren, so berechnet sich der Erwartungswert der Photonendichte $n(\underline{k})$ im Glauberzustand $G|0\rangle$ allein durch die Funktion g_0 und es gilt:

$$\langle 0 | G_m^*(\underline{k}) G | 0 \rangle = \frac{2\varrho^2}{k_0 k_2^2 k_3^2} \{ 1 - \cos(k_1 L) \}. \quad (\text{A.1/5})$$

Denkt man $k_2 \approx 0$, $k_3 \approx 0$ (aber beide $\neq 0$) konstant gelassen, so ist

$$\langle 0 | G^*_n(k) G | 0 \rangle \sim \frac{1 - \cos(k_1 L)}{k_1} \quad (\text{A.1/6})$$

Daraus kann man die Impulswerte bestimmen, für welche die Photonendichte maximal wird. Für solche k_1 muß gelten:

$$\sin(k_1 L) = \frac{1 - \cos(k_1 L)}{k_1 L}, \quad (\text{A.1/7})$$

was für große k_1 in die Bedingung $\sin(k_1 L) \cong 0$, das heißt $k_1 = n\pi/L$, $n \in \mathbb{N}$, übergeht.

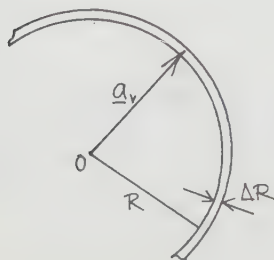
Führt man zu k_1 die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k_1$ ein, so gilt also für große ganzzahlige n :

$$L = n \frac{\lambda(n)}{2}. \quad (\text{A.1/8})$$

Dies ist die Bedingung für mögliche stehende Wellen zwischen den Kondensatorplatten.

Als zweites Beispiel betrachten wir den Kugelkondensator.

Eine Punktladung der Ladung $-N\varepsilon$ sei in weitem Abstand von N punktförmigen Gegenladungen der Einzelstärke $+\varepsilon$ so umgeben, daß diese gleichmäßig auf einer Kugelschale verteilt sind (an den Endpunkten der Ortsvektoren $\underline{a}_\nu$).



Analog (A.1/1) gilt dann

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \varepsilon \sum_{v=1}^N \delta(x - a_v) - N \varepsilon \delta(x), \\ j_0(k) &= \varepsilon \sqrt{2k_0} \left\{ \sum_{v=1}^N e^{i k a_v} - N \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.1/9})$$

worin $4\pi R^2 \Delta R$ das Volumen der Kugelschale ist, über die nachher integriert wird. Mit Kugelkoordinaten ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \frac{N}{V(v)} \int d^3x e^{i k x} &= \frac{N}{4\pi R^2 \Delta R} \int e^{i k x} R^2 \sin \vartheta \Delta R d\vartheta d\varphi = \\ \frac{N}{4\pi} \int e^{i R \{ k_1 \cos \varphi \sin \vartheta + k_2 \sin \varphi \sin \vartheta + k_3 \cos \vartheta \}} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.1/10})$$

Wegen der Rotationssymmetrie genügt es, nur Photonen mit Impuls $k_1 = 0 = k_2$, k_3 in Betracht zu ziehen. Für diese ist (A.1/10) einfach

$$\frac{N}{4\pi} \int e^{i R k_3 \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{N}{R k_3} \sin(R k_3)$$

und damit

$$j_0(k) = \varepsilon \sqrt{2k_0} \left\{ \frac{N}{R k_3} \sin(R k_3) - N \right\}, \quad (\text{A.1/11})$$

$$g_0(k) = -\varepsilon \sqrt{\frac{2}{k_0}} \left\{ \frac{N}{R k_3} \sin(R k_3) - N \right\}. \quad (\text{A.1/12})$$

Der Erwartungswert der Photonendichte im Glauberzustand $G|0\rangle$ ist folglich

$$\frac{2\varepsilon^2}{k_0^2} N^2 \left\{ \frac{\sin(R k_3)}{R k_3} - 1 \right\}^2 \sim \frac{1}{k_3^2} \left\{ \frac{\sin(R k_3)}{R k_3} - 1 \right\}^2 \quad (\text{A.1/13})$$

und wird in Abhängigkeit von k_3 maximal, wenn für große k_3 gilt: $\tan(R k_3) = (R k_3)$, d. h. mit $\lambda = 2\pi/k_3$:

$$R = n \frac{\lambda(n)}{2} \quad \text{für große } n. \quad (\text{A.1/14})$$

Damit ist ein Ergebnis analog (A.1/8) erhalten.

A.2: Interferenzen im Strahlungsfeld zweier Punktstrahler.

Im $\underline{x}$ - Raum befinden sich an den Endpunkten der Ortsvektoren $\underline{Q}$ und $\underline{L}$ zwei δ - artige Ladungsverteilungen entgegengesetzten Vorzeichens, aber gleichen Ladungsbetrages. Die Ladungen ändern sich gegenläufig mit der Kreisfrequenz ω :

$$j_0(\underline{x}) = e e^{-i\omega x_0} \{ \delta(\underline{x} - \underline{L}) - \delta(\underline{x}) \}, \quad (\text{A.2/1})$$

$$j_0(\underline{k}, x_0) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2k_0} e^{-i\omega x_0} \{ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{L}} - 1 \}, \quad (\text{A.2/2})$$

$$\begin{aligned} g_0(\underline{k}, x_0) &= -i e^{-ik_0 x_0} \int_0^{x_0} dt e^{ik_0 t} j_0(\underline{k}, t) \\ &\sim \sqrt{k_0} \{ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{L}} - 1 \} \frac{e^{-i\omega x_0} - e^{-ik_0 x_0}}{k_0 - \omega} \end{aligned} \quad (\text{A.2/3})$$

Wegen der Stromerhaltung

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}(\underline{k}, x_0) = i \dot{j}_0(\underline{k}, x_0) = -i\omega j_0(\underline{k}, x_0)$$

ist zu (A.2/1) noch eine Stromdichte $j_r(\underline{k}, x_0)$ passend zu definieren. Am einfachsten setzt man

$$j_r(\underline{k}, x_0) = -i\omega \frac{k_r}{k_0^2} j_0(\underline{k}, x_0),$$

wodurch $g_r^* g^\dagger$ zu $g_0^* g^0$ proportional wird. Der Proportionalitätsfaktor enthält keine Impulsvariablen. Zur Diskussion der Photonendichte genügt es daher, $g_0^* g^0$ allein zu betrachten:

$$g_0^* g^0 \sim k_0 (1 - \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{L}) \frac{1 - \cos [(k_0 - \omega) x_0]}{(k_0 - \omega)^2}. \quad (\text{A.2/4})$$

Der letzte Term hierin nimmt für $k_0 = \omega$ sein Maximum an. Interessiert man sich nur für die Anzahldichte der Photonen mit $k_0 \cong \omega$, so ist nur noch zu diskutieren:

$$1 - \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{L}). \quad (\text{A.2/5})$$

Dieser Ausdruck liefert die üblichen Regeln der hier auftretenden Interferenzerscheinungen, wie man sie auch anschaulich im Wellenbild mit Hilfe von Gangunterschieden gewinnt:

(A.2/5) verschwindet für

$$\underline{k} \cdot \underline{L} = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Mit einem Einheitsvektor $\underline{e}(n) = \underline{k}/\omega$ ist dafür

$$\underline{e}(n) \cdot \underline{L} = n \frac{2\pi}{\omega} = n\lambda.$$

"Auslöschung" findet demnach unter solchen Richtungen statt, für die der Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist (die Punktstrahler schwingen gegenphasig).

Maximale Ausstrahlung findet unter solchen Richtungen statt, für die gilt

$$\cos\{\omega \underline{e}(n) \cdot \underline{L}\} = -1, \text{ das heißt:}$$

$$\underline{e}(n) \cdot \underline{L} = (2n + 1)\pi/\omega = (n + 1/2)\lambda.$$

Der Gangunterschied muß also hier das ungeradzahlige Vielfache einer halben Wellenlänge sein.

B) Topologische Bemerkungen zu den Lorentzräumen.

In 2.2 hatten wir aus den Lorentzräumen $F_L(1)$ die Restklassenräume $F_L^*(1)$ gebildet, um zu erreichen, daß die Gupta - Bleuler - Form auf $F_L^*(1)$ positiv - definit wird. Dadurch ist $F_L^*(1)$ ein normierter Raum, so daß (vermöge der Normtopologie) die topologischen Begriffe wie "Cauchyfolge", "konvergent", "dicht", "stetig" in ihm einen Sinn haben. In 2.2 wurde behauptet, daß $F_L^*(1)$ Prä - Hilbertraum sei; dazu ist noch zu zeigen: $F_L^*(1)$ ist separabel.

Zum Beweis benutzen wir, daß bereits F' eine abzählbare Basis besitzt (denn alle Räume $L^2(\mathbb{R}^{3n})$, $n \in \mathbb{N}$, besitzen abzählbare Basen). Bei Bildung von Unterräumen und Übergang zum Restklassenraum bleibt diese Eigenschaft erhalten, so daß jedenfalls $F_L^*(1)$ eine abzählbare Basis hat. Nach der Definition der Separabilität ist aber noch zu zeigen, daß es in $F_L^*(1)$ eine abzählbare dichte Menge gibt. Dazu benutzt man weiter, daß die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist und in $\mathbb{R}$ dicht liegt, so daß die Zahlenmenge $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt und ebenfalls abzählbar ist. Bildet man nun aus einer abzählbaren Basis von $F_L^*(1)$ derart ein lineares Erzeugnis, daß man nur Zahlenkoeffizienten aus $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ zuläßt, so ist eine abzählbare und in $F_L^*(1)$ dicht liegende Vektorenmenge gewonnen.

Ein Prä - Hilbertraum kann durch eine mathematische Standardkonstruktion stets zu einem Hilbertraum erweitert werden: Man komplettiert den Raum zunächst, indem man alle Cauchyfolgen (modulo der Nullfolgen) hinzunimmt. Die entstandene vollständige Hülle kann allerdings wieder Vektoren der Norm 0 enthalten. Da alle diese aber wieder einen Unterraum bilden (die CS - Ungleichung gilt auch in der vollständigen Hülle weiter), kann nach diesem eine erneute Restklassen-

bildung stattfinden, die dann endgültig zu einem Hilbertraum führt.

Nach der hiermit skizzierten Konstruktion kann also $F_L^*(1)$ in einen Hilbertraum eingebettet werden. Es entsteht aber die Frage, ob nicht vielleicht die vollständige Hülle $\overline{F_L^*(1)}$ des Raumes $F_L^*(1)$ der $F_L^*(1)$ selber ist, so daß bereits $F_L^*(1)$ Hilbertraum wäre.

Für diese Vermutung spricht, daß $L(\underline{k})$ auf $F_L^*(1)$ ein stetiger Operator ist (denn $L(\underline{k})$ ist dort das $l(\underline{k})$ -fache des Einheitsoperators). Daher kann $L(\underline{k})$ auf die vollständige Hülle $\overline{F_L^*(1)}$ höchstens so fortgesetzt werden, daß auch deren Vektoren Eigenvektoren von $L(\underline{k})$ zum Eigenwert $l(\underline{k})$ sind.

Jedoch müssen die Vektoren aus $\overline{F_L^*(1)} \setminus F_L^*(1)$ sich nicht als Restklassen von Elementen aus F' nach $N_L(1)$ darstellen, denn es braucht $a_\mu(\underline{k})$ dort nicht definiert zu sein. Für den Grenzwert einer Cauchyfolge muß ja die Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n=0}^3 \int d\underline{k}_1 \dots d\underline{k}_n \phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}^+(\underline{k}, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) \phi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(\underline{k}, \underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n) < \infty$$

aus 1.3 nicht mehr erfüllt sein, auch wenn sie für alle Vektoren der Folge gilt. Im allgemeinen wird daher $\overline{F_L^*(1)}$ eine echte Erweiterung von $F_L^*(1)$ sein.

Literaturverzeichnis.

- [1] J. v. Neumann,
Math. Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin
(Springer) 1932.
- [2] S. Gupta,
Proc. Phys. Soc. London A 63, 681 (1950).
- [3] K. Bleuler,
Helv. phys. Acta 23, 567 (1950).
- [4] S. Gupta,
Proc. Phys. Soc. London A 64, 850 (1951).
- [5] R. J. Glauber,
Phys. Rev. 84, 395 (1951).
- [6] K. O. Friedrichs,
Math. Aspects of the Quantum Theory of Fields,
New York (Interscience Publ.) 1953, pp. 37 - 94.
- [7] J. M. Cook,
Trans. Amer. Math. Soc. 74, 222 (1953).
- [8] G. Källén in:
S. Flügge, Handbuch d. Physik, Bd. V/1, Berlin
(Springer) 1958, pp. 199 ff.
- [9] L. K. Pandit,
Nuovo Cim., Suppl. Vol. 11, Ser. 10 (1959).
- [10] R. J. Glauber,
Phys. Rev. 130, 2529 (1963).

- [11] R. J. Glauber,
Phys. Rev. 131, 2766 (1963).
- [12] S. S. Schweber,
An Introduction to Relativistic Quantum Field
Theory, New York (Harper & Row) 1964, pp. 240 - 253.
- [13] T. W. B. Kibble,
J. Math. Phys. 9, 315 (1968).
- [14] J. Gomatam,
Phys. Rev. D, Vol. 3, 6, 1292 (1971).
- [15] F. Hirzebruch, W. Scharlau,
Einführung in die Funktionalanalysis,
BI - HTB, Bd. 296 a*, 1971, Bibl. Inst. Mannheim.
- [16] G. Reents,
J. Math. Phys. 15, 31 (1974).

Zusammenfassung.

Gegenstand der Untersuchungen ist die Theorie der Wechselwirkung zwischen dem quantisierten Strahlungsfeld und einer vorgegebenen Viererstromdichte. Als Zustandsraum wird der Gupta - Bleuler - Raum zugrunde gelegt. Im Vordergrund des Interesses stehen Wechselbeziehungen zwischen physikalischen und raumgeometrischen Aussagen.

Abschnitt 1:

Der Gupta - Bleuler - Raum $(F, \langle | \rangle)$ wird eingeführt. In ihm werden die Erzeuger- und Vernichterooperatoren für Photonen gemäß [6] formal definiert. Alle weiteren Überlegungen beziehen sich dann nur noch auf den Definitionsbereich $F' \subset F$ von $a_\mu(\underline{k})$. In F' wird eine Doppelfaserung folgendermaßen eingeführt: Mit Hilfe der Gruppe $\mathcal{D}$ der von Friedrichs und Glauber betrachteten pseudounitären Exponentialoperatoren wird $\{D|\phi\rangle \mid D \in \mathcal{D}\}$ als "Normfaser" durch $|\phi\rangle \in F'$ bezeichnet; alle $D|\phi\rangle$ haben die gleiche Norm. Jeder $|\phi\rangle$ mit $\langle \phi | \phi \rangle \neq 0$ kann in der Form $|\phi\rangle = D|\phi_0\rangle$ geschrieben werden, wobei $\langle \phi_0 | a_\mu(\underline{k}) | \phi_0 \rangle = 0$ für alle μ und $\underline{k}$ ist. Vektoren $|\phi_0\rangle$ mit dieser Eigenschaft fassen wir zur " (a_μ) - Nullfaser" zusammen, so daß alle Vektoren einer bestimmten Normfaser "über" einem gewissen $|\phi_0\rangle$ der (a_μ) - Nullfaser "liegen". Wir verallgemeinern weiter den Begriff der (a_μ) - Nullfaser zu dem der " (a_μ) - Faser", indem wir alle $|\phi\rangle \in F'$ zu dieser zusammenfassen, wenn sie für alle μ und $\underline{k}$ hinsichtlich $\langle \phi | a_\mu(\underline{k}) | \phi \rangle$ übereinstimmen. Die eingeführte Doppelfaserung ist ein wichtiges Hilfsmittel für die weiteren Untersuchungen.

Abschnitt 2:

Der volle Raum $(F, \langle | \rangle)$ trägt noch recht unphysikalische Züge, so daß es notwendig ist, geeignete Unterräume herauszugreifen. Solche werden gewonnen, indem

eine verallgemeinerte Lorentzbedingung gestellt wird. Der "Lorentzraum" $F_L(1)$ soll alle Eigenvektoren von $L(\underline{k}) = k^\nu a_\nu(\underline{k})$ zur Eigenwertfunktion $l = l(\underline{k})$ enthalten. Damit richtet sich die (neue) Lorentzbedingung gleich an ganze Normfasern. Auf jedem $F_L(1)$ ist die Gupta - Bleuler - Form positiv - semidefinit; bereits im linearen Erzeugnis zweier verschiedener $F_L(1)$ kann dies nicht mehr gelten.

Durch geeignete Restklassenbildung wird aus $F_L(1)$ der Prä - Hilbertraum $F_L^*(1)$ gewonnen, der sich (durch Kompletterung) in einen Hilbertraum einbetten läßt. Soll sich nun "die Physik" jeweils nur innerhalb eines (beliebigen) $F_L(1)$ abspielen, wofür es Gründe gibt, so sind nur solche Operatoren sinnvoll anwendbar, die (eventuell nach geeigneter Beschränkung ihres Definitionsbereichs) Vektoren aus $F_L(1)$ stets auf ebensolche abbilden. Ferner sollten diese Operatoren auf $F_L^*(1)$ übertragbar sein. Diese Forderungen führen zum Begriff der "Lorentzobservablen", mit dessen Hilfe die Restklassenbildung in $F_L(1)$ ("Lorentzäquivalenz") physikalisch anschaulich gemacht wird. Insbesondere zeigt sich, daß eine in einem Lorentzraum startende Schrödingerkurve diesen Raum nicht verläßt, wenn H Lorentzobservable ist. Mit Hilfe des Begriffs der Lorentzäquivalenz wird schließlich gezeigt, unter welchen Bedingungen ein Vektor zu einem Zustand lorentzäquivalent ist, der nur transversale Photonen enthält. Dazu wird für jeden Vektor aus $F_L(0)$ eine "Transversaldarstellung" bewiesen.

Abschnitt 3:

Die Schrödingerkurven werden unter Vorgabe des freien Hamiltonoperators aufgestellt. Durchläuft ein Vektor seine Schrödingerkurve, so kann die Zeitabhängigkeit des Erwartungswertes von $a_\mu(\underline{k})$ angegeben werden. Dieser

hat die Form $k_\mu \epsilon(k)$, wenn man noch voraussetzt, daß die elektromagnetischen Feldstärken im Zustand verschwinden sollen. Dadurch gelangt man wieder zur Eichgruppe $\mathcal{E}$ zurück, die in Abschnitt 2 bei der Aufstellung der lorentzäquivalenten Vektoren ein- und derselben Normfaser eine Rolle gespielt hat. Die Operatoren von $\mathcal{E}$ bewirken genau die Umeichung der Erwartungswerte von $A_\mu(\underline{x})$.

Abschnitt 4:

Die durch H bestimmte Schrödingerkurve durch vorgegebenes $|\phi\rangle \in F'$ wird angegeben. Allgemein zeigt sich, daß jede solche Schrödingerkurve vermöge der Normfaserung über einer freien Schrödingerkurve in der (a_μ) - Nullfaser liegt.

Wurde $|\phi\rangle \in F_L(1)$ gewählt, so verläßt die durch $|\phi\rangle$ gezogene Schrödingerkurve diesen Raum nicht, wenn die Ladungsdichte zeitkonstant ist und $1 = j_0(k) = \text{Fouriertransformierte von } j_0(\underline{x})$ gilt. In dieser Hinsicht besteht eine eindeutige Zuordnung zwischen den zeitkonstanten Ladungsdichten und den Lorentzräumen.

Einen weiteren Hinweis darauf, daß die Art der Zeitabhängigkeit von j_0 für eine sinnvolle Quantentheorie im Gupta - Bleuler - Raum entscheidend ist, ergibt die Forderung nach nichtnegativem Erwartungswert für die Photonendichte. Eine dazu hinreichende Bedingung wird aufgestellt. Anhand eines Beispiels wird diese Beziehung aus der Energie - Zeit - Unschärferelation gedeutet.

Zu großem Dank bin ich Herrn Prof. Dr. F. Bopp verpflichtet, der mir die Möglichkeit bot, neben meiner beruflichen Tätigkeit an seinem Lehrstuhl zu arbeiten und der das Thema der Dissertation festgelegt hat. Herrn Dr. V. Ernst danke ich sehr für die Anregung des Arbeitsthemas und eine Reihe förderlicher Diskussionen, insbesondere auch dafür, daß diese Gespräche gelegentlich zu unkonventionellen Zeiten stattfinden konnten.

L e b e n s l a u f

Am 20. 7. 1938 wurde ich als Sohn des Verwaltungsbeamten Georg Geßner und seiner Ehefrau Katharina, geb. Wölker, in Bamberg geboren. Aufgewachsen bin ich in Höchststadt/Aisch, wo ich die Volksschule besuchte. Nach vier Klassen trat ich in ein Bamberger Gymnasium altsprachlicher Richtung ein. 1958 legte ich in Bamberg die Reifeprüfung ab. Vom Wintersemester 1958/59 an studierte ich in Erlangen Mathematik und Physik. Im Sommer 1963 beendete ich das Studium mit der Wissenschaftlichen Prüfung für das Lehramt an Gymnasien. Vom Herbst 1963 bis Herbst 1965 nahm ich an einer schulpraktischen Ausbildung in Würzburg teil (Referendarzeit). Anschließend wurde ich als Studienassessor am Röntgengymnasium Würzburg eingesetzt. Ernennungen zum Studienrat, Oberstudienrat und Gymnasialprofessor erfolgten. Vom 1. 6. 1971 bis 1. 2. 1974 war ich an das Bayerische Staatsministerium für Unterricht und Kultus zur Mitarbeit im Referat für quantitative Fragen der Bildungsplanung abgeordnet. Während dieser Münchener Zeit entstand die vorliegende Dissertation. Seit 1. 2. 1974 bin ich am neu errichteten Friedrich Koenig - Gymnasium Würzburg tätig.

